

۱- متغیر تصادفی X توسط تابع چگالی احتمال (PDF) زیر تعریف شده است:

$$f_X(x) = 0.5 |x| e^{-|x|}$$

- الف: $P(X > 1)$ را بیابید.
 ب: $P(-1 < X \leq 2)$ را بیابید.
 ج: $P(X \leq -2)$ را بیابید.
 د: میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را به دست آورید.

۲- برای متغیر تصادفی X ، تابع چگالی احتمال (PDF) زیر را در نظر بگیرید:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{32}} u(x)$$

- الف: $f_X(x)$ را رسم کرده و با ذکر دلیل بیان کنید آیا X یک متغیر تصادفی گاوسی است.
 ب: برای متغیر تصادفی X مقادیر $P(X > 1)$ و $P(1 < X \leq 2)$ را بیابید.
 ج: میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را به دست آورید.

۳- متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند (k مقدار ثابت است):

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- الف: مقدار k را به دست آورید.
 ب: $P(X+Y > 1)$ را به دست آورید.
 ج: $P(X > Y)$ را بیابید.
 د: $P(X > Y | X+2Y > 1)$ را به دست آورید.
 ه: $F_X(x | X+2Y > 1) = \frac{P(X \leq x, X+2Y > 1)}{P(X+2Y > 1)}$ را بیابید.
 ز: $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به دست آورید.

4- متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در بازه $-1 \leq X \leq 3$ می باشد. در این صورت:

الف: PDF متغیر تصادفی تعریف شده با تبدیل $Z = \sqrt{X+1}$ را بیابید.

ب: PDF متغیر تصادفی تعریف شده با تبدیل $Z = |X|$ را بیابید.

5- دو مهره را از کیسه ای که شامل 5 مهره قرمز، 3 مهره سفید و 2 مهره سبز است، به طور تصادفی

در بردن جایگزینی برد می داریم.

الف: احتمال یکسان بودن رنگ مهره ها را بیابید. از احتمال شرطی استفاده کنید و شرط را رنگ

مهره اول قرار دهید.

ب: اگر مهره های بردن کشیده شده هم رنگ باشند، احتمال سفید بودن آنها چه قدر است؟

6- متغیرهای تصادفی مستقل X و Y با توابع چگالی احتمال زیر در نظر بگیرید:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

که در آن α و β ثابت های مثبت فرض شده اند. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی

$Z = X + Y$ را بیابید.

مسئله را برای حالتی که $\alpha = \beta$ است، نیز مورد بررسی قرار دهید.