1

پاسخ تمرین‌های تکلیف شماره ۱

درس فیلتر و سنتز مدار

محمدعلی شفیعیان

1- در کلاس، راجع به خصوصیات تابع $H_1(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ صحبت شد:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2+s+1} = s^2 \times H_1(s)$$

$$|H(j\omega)| = |H_1(j\omega)| \times \omega^2 \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{1-\omega^2+\omega^4}}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle H_1(j\omega) + \measuredangle j\omega = \measuredangle H_1(j\omega) + \pi \rightarrow \measuredangle H(j\omega) = \pi + \tan^{-1}\frac{-\omega}{1-\omega^2}$$

روشن است که تأخیر گروهی $H(j\omega)$ با تأخیر گروهی $H_1(j\omega)$ با یکدیگر برابر هستند.

$$\tau_{gr}(\omega) = \tau_1(\omega) = \frac{1+\omega^2}{1-\omega^2+\omega^4}$$

$$Re\, H(j\omega) = \frac{-\omega^2(1-\omega^2)}{1-\omega^2+\omega^4} \qquad Im\, H(j\omega) = \frac{\omega^3}{1-\omega^2+\omega^4}$$

-2

اثبات قسمت‌های (الف) و (ب):

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt = Re\, H(j\omega) + j\, Im\, H(j\omega)$$

$$H(-j\omega) = \underbrace{Re\, H(-j\omega) + j\, Im\, H(-j\omega)}_{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-(-j\omega t)}\, dt = H^*(j\omega)$$

$$= \underbrace{Re\, H(j\omega) - j\, Im\, H(j\omega)}_{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \quad Re\, H(j\omega) = Re\, H(-j\omega)$$

$$Im\, H(j\omega) = -Im\, H(-j\omega)$$

پ) $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$

$$|H(j\omega)| = \left[(Re\,H(j\omega))^2 + (Im\,H(j\omega))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|H(-j\omega)| = \left[(Re\,H(-j\omega))^2 + (Im\,H(-j\omega))^2\right]^{\frac{1}{2}} \underset{\text{(الف) و (ب)}}{\overset{\text{با توجه به قسمت}}{=\!=}} \left[(Re\,H(j\omega))^2 + (-Im\,H(j\omega))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(Re\,H(j\omega))^2 + (Im\,H(j\omega))^2\right]^{\frac{1}{2}} = |H(j\omega)| \rightarrow |H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$$

ت) $\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle H(-j\omega)$

$$\measuredangle H(j\omega) = \tan^{-1}\frac{Im\,H(j\omega)}{Re\,H(j\omega)}$$

$$\measuredangle H(-j\omega) = \tan^{-1}\frac{Im\,H(-j\omega)}{Re\,H(-j\omega)} = \tan^{-1}\frac{-Im\,H(j\omega)}{Re\,H(j\omega)} = -\tan^{-1}\frac{Im\,H(j\omega)}{Re\,H(j\omega)}$$

$$\rightarrow \measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle H(-j\omega)$$

ث) $\tau_{gr}(\omega) = \tau_{gr}(-\omega)$

$$\tau_{gr}(\omega) = \frac{-d}{d\omega}\measuredangle H(j\omega)$$

$$\tau_{gr}(-\omega) = +\frac{d}{d\omega}\underbrace{\measuredangle H(-j\omega)}_{-\measuredangle H(j\omega)} = \frac{-d}{d\omega}\measuredangle H(j\omega) \rightarrow \tau_{gr}(\omega) = \tau_{gr}(-\omega)$$

بنابه قسمت (ت)

3- با توجه به رفتار دامنه فیلتر F، هر سینوسی موجود در $x(t)$ با ضریب $\frac{1}{2}$ در خروجی نیز ظاهر می‌شوند اما فاز سیگنال خروجی تحت تأثیر رفتار غیرخطی فاز فیلتر قرار می‌گیرد. رفتار غیرخطی فاز فیلتر به صورت زیر قابل بیان است:

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{400}\omega & \omega \le 100 \\ -\frac{\pi}{4000}(\omega - 100) - \frac{\pi}{4} & 100 \le \omega \le 1100 \\ -\frac{\pi}{2} & 1100 \le \omega \end{cases}$$

پاسخ تمرین های تکلیف شماره ۱ (ادامه)

می دانیم که فاز تابع خروجی برابر است با مجموع فاز سیگنال ورودی و فاز تابع شبکه فیلتر ($\angle Y(j\omega)=\angle H(j\omega)+\angle X(j\omega)$).
سیگنال ورودی حاوی سه مؤلفه فرکانسی $\omega_1=60$ ، $\omega_2=600$ و $\omega_3=3000$ است.
اختلاف فاز تحمیل فیلتر در این فرکانس ها (با توجه به رابطه $\Phi(\omega)$) به ترتیب برابر است با:

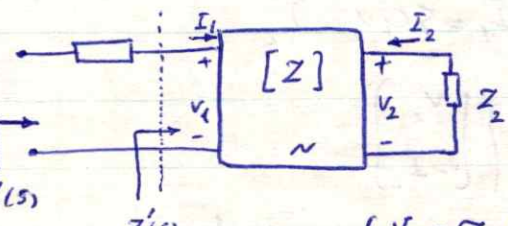
$$\Phi_1=-\frac{3\pi}{20}, \quad \Phi_2=-\frac{3\pi}{8} \quad \Phi_3=-\frac{\pi}{2}$$

پس:

$$y(t)=\frac{1}{2}\cos\left(60t+\frac{3\pi}{20}\right)+5\cos\left(600t+\frac{3\pi}{8}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(3000t+\frac{\pi}{2}\right)$$

دقت کنید که هرچند فرکانس های موجود در ورودی، ضمن عبور از فیلتر محفوظ مانده اند و در خروجی دیده می شوند، اما به خاطر رفتار غیرخطی فاز فیلتر، سیگنال خروجی دچار اغتشاش شده است.

(4)



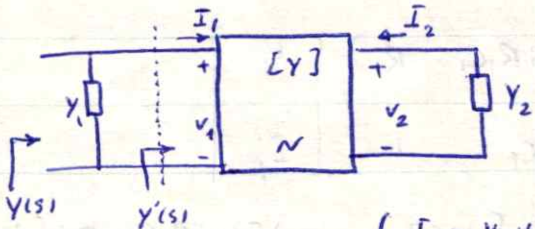
$$Z(s)=Z_1+Z'(s)=Z_1+\frac{V_1}{I_1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} V_1=Z_{11}I_1+Z_{12}I_2 \\ V_2=Z_{21}I_1+Z_{22}I_2 \\ V_2=-Z_2I_2 \end{array}\right\} \rightarrow -Z_{21}I_1=(Z_2+Z_{22})I_2$$

$$\rightarrow V_1=Z_{11}I_1+Z_{12}\times\frac{-Z_{21}}{Z_2+Z_{22}}I_1=\left(Z_{11}-\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_2+Z_{22}}\right)I_1$$

$$\rightarrow Z(s)=Z_1+Z_{11}-\frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}+Z_2}$$

(5)



$$Y(s)=Y_1+Y'(s)=Y_1+\frac{I_1}{V_1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} I_1=Y_{11}V_1+Y_{12}V_2 \\ I_2=Y_{21}V_1+Y_{22}V_2 \\ I_2=-Y_2V_2 \end{array}\right\} -Y_2V_2=Y_{21}V_1+Y_{22}V_2 \rightarrow V_2=\frac{-Y_{21}}{Y_{22}+Y_2}V_1$$

$$\rightarrow I_1 = Y_{11}V_1 - Y_{12}\frac{Y_{21}}{Y_{22}+Y_2}V_1 \quad \rightarrow Y'(s) = \frac{I_1}{V_1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}+Y_2}$$

$$\rightarrow Y(s) = Y_1 + Y'(s) \Longrightarrow \quad Y(s) = Y_1 + Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}+Y_2}$$

(۶)

الف) $V_1 = R_1 I_1 + \frac{1}{sC_1}(I_1+I_2) = (R_1 + \frac{1}{sC_1})\frac{V_1-V_2}{R_1} + \frac{1}{sC_1}I_2$

$$\rightarrow V_1\left[1 - \frac{1}{R_1}(R_1+\frac{1}{sC_1})\right] = \frac{-1}{R_1}(R_1+\frac{1}{sC_1})V_2 + \frac{1}{sC_1}I_2$$

$$\rightarrow V_1 = sC_1(R_1+\frac{1}{sC_1})V_2 - R_1 I_2 = (1+sC_1R_1)V_2 - R_2 I_2$$

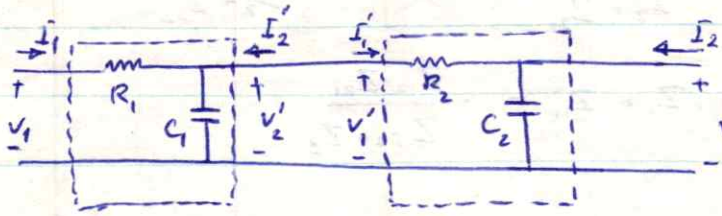
از طرف دیگر $V_2 = \frac{1}{sC_1}(I_1+I_2) \rightarrow I_1 = sC_1V_2 - I_2$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+sC_1R_1 & R_1 \\ sC_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

و به طور مشابه برای قسمت (ب) داریم:

ماتریس انتقال $= \begin{bmatrix} 1+sC_2R_2 & R_2 \\ sC_2 & 1 \end{bmatrix}$

ج) شبکه قسمت (ج) ترکیبی از دو مدار قسمت های (الف) و (ب) است:



$$\begin{cases} I_1' = -I_2' \\ V_2' = V_1' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+sR_1C_1 & R_1 \\ sC_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+sR_1C_1 & R_1 \\ sC_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+sR_2C_2 & R_2 \\ sC_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1+sR_1C_1 & R_1 \\ sC_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+sR_2C_2 & R_2 \\ sC_2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس انتقال کل مدار}}\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$