پاسخ تمرین های تکلیف شماره ۲

درس فیلتر و سنتز مدار

محمدعلی شفیعیان

-1

الف) $f(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}=\dfrac{1}{s^2+2s+2}\times\dfrac{(-s)^2-2s+2}{(-s)^2-2s+2}$

$$=\frac{s^2-2s+2}{s^4+4}=\underbrace{\frac{s^2+2}{s^4+4}}_{\text{زوج}}+\underbrace{\frac{-2s}{s^4+4}}_{\text{فرد}}$$

ب) $f(s)=\dfrac{s^2+1}{s^2+2s+2}=\dfrac{s^2+1}{s^2+2s+2}\times\dfrac{s^2-2s+2}{s^2-2s+2}=\dfrac{s^4-2s^3+3s^2-2s+2}{s^4+4}$

$$=\underbrace{\frac{s^4+3s^2+2}{s^4+4}}_{\text{زوج}}+\underbrace{\frac{-2s^3-2s}{s^4+4}}_{\text{فرد}}$$

2- توجه: ابتدا پاسخ قسمت (ت) سپس پاسخ قسمت (پ) نوشته شده است

الف) $f(s)=s^4-2s^2+1=(s^2-1)^2 \rightarrow s=\pm 1$

هرکدام از ریشه‌های بالا به صورت مکرر وجود دارند.

ب) $f(s)=s^4+9s^2+25$

$$s^2=x \rightarrow x^2+9x+25=0 \Rightarrow x=-\frac{9}{2}\pm j\sqrt{\frac{19}{2}}$$

بنابراین $s^2=-\frac{9}{2}\pm j\sqrt{\frac{19}{2}}$ ریشه‌های مکرر چندجمله‌ای بالا هستند.

ت) $f(s)=s^6+s^4+7s^2-9$

$$=(s-1)(s+1)(s^4+2s^2+9)$$

تشخیص ریشه‌های $s=\pm 1$ به آسانی با توجه به مجموع ضرایب چندجمله‌ای و زوج بودن آن صورت می‌پذیرد. ریشه‌های $s^2=-1\pm j2\sqrt{2}$ نیز ریشه‌های $\underset{\text{مکرر}}{\text{چندجمله‌ای}}$ درجه 4 می‌باشند

ج) $f(s) = s^4 + 5s^2 + 9$

$s^2 = -\frac{5}{2} \pm j\sqrt{\frac{11}{2}}$ با انجام روشی مانند قسمت (ب) باز هم به سادگی مشخص است!
ریشه‌های مکرر چندجمله‌ای بالا هستند.

ث) $f(s) = s^6 - 3s^4 + 3s^2 - 1$

مانند قسمت (ت) داریم،

$$f(s) = (s-1)(s+1)\underbrace{(s^4 - 2s^2 + 1)}_{(s-1)^2(s+1)^2} = (s-1)^3(s+1)^3$$

3-

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\omega^3 - \omega}{\omega^2 + 1}$$

$$\omega = \frac{s}{j} \rightarrow \phi\left(\frac{s}{j}\right) = -\tan^{-1}\frac{-2s^3 - s}{j(-s^2+1)}\Bigg|_{s=j\omega}$$

$$\phi_o(s) = -2s^3 - s \quad , \quad \phi_e(s) = -s^2 + 1$$

$$P(s) = \phi_o(s) + \phi_e(s) = -2s^3 - s^2 - s + 1 = (-2s+1)(s^2+s+1)$$

$$A(s) = s^2 + s + 1 \quad , \quad B(-s) = -2s + 1 \rightarrow B(s) = 2s + 1$$

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{2s + 1}$$

4-

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2}{\omega^6 - \omega^4 + 7\omega^2 + 9} \quad , \quad \omega = \frac{s}{j} \rightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{1 - s^2}{-s^6 - s^4 - 7s^2 + 9}\Bigg|_{s=j\omega}$$

$$C(s) = A(s)A(-s) = 1 - s^2 \rightarrow A(s) = 1 + s$$

$$D(s) = -s^6 - s^4 - 7s^2 + 9 = -(s^2-1)(s^4 + 2s^2 + 9) = -(s^2-1)(s^2+2s+3)(s^2-2s+3)$$

$$\rightarrow B(s) = (s+1)(s^4 + 2s^2 + 3)$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{1+s}{(s+1)(s^4 + 2s^2 + 3)}$$

پاسخ تمرین های تکلیف شماره ۲ (ادامه)

5-

$$p(s) = s^2 + a_0 s + b_0 \rightarrow p(-s) = s^2 - a_0 s + b_0$$

$$p(s)p(-s) = s^4 + (2b_0 - a_0^2)s^2 + b_0^2 = s^4 + as^2 + b$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2b_0 - a_0^2 = a \\ b_0^2 = b \end{cases} \rightarrow b_0 = \sqrt{b} \ , \ a_0 = \sqrt{2b_0 - a}$$

از طرفی برای آنکه ریشه ها دارای تقارن چهارگانه باشند باید:

$$a^2 - 4b < 0$$

و در نتیجه:

$$a^2 - 4b_0^2 = (a - 2b_0)(a + 2b_0) < 0$$

$$\rightarrow a - 2b_0 < 0 \rightarrow 2b_0 - a > 0$$

با توجه به اینکه $b > 0$ و $2b_0 - a > 0$ است معلوم می شود که a_0 و b_0 مقادیری حقیقی دارند.