1

پاسخ تمرین‌های تکلیف شماره ۳
درس فیلتر و سنتز مدار

محمدعلی شفیعیان

-1

(a) $p(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 7s + 1$

$$T(s) = \frac{s^4 + s^2 + 1}{2s^3 + 7s} \quad , \quad d = 4$$

با تشکیل تابع آزمون و بسط جزئی آن اقدام به بیرون کشیدن قطب در بینهایت می‌کنیم،

$$\begin{array}{l|l} s^4 + s^2 + 1 & 2s^3 + 7s \\ \underline{s^4 + \frac{7}{2}s^2} & \frac{1}{2}s \\ -\frac{5}{2}s^2 + 1 & \end{array} \qquad q_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l|l} 2s^3 + 7s & -\frac{5}{2}s^2 + 1 \\ \underline{2s^3 - \frac{4}{5}s} & -\frac{4}{5}s \\ \frac{39}{5}s & \end{array} \qquad q_2 = \frac{-4}{5} < 0$$

با توجه به مقدار منفی q_2 نیازی به ادامه عملیات نیست و مشخص می‌شود که $p(s)$ نه هورویتز است و نه هورویتز تغییر یافته.

(b) $p(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 2s + 6$

$$T(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{s^4 + 5s^2 + 6}{2s^3 + 2s}$$

$$\begin{array}{l|l} s^4 + 5s^2 + 6 & 2s^3 + 2s \\ \underline{s^4 + s^2} & \frac{1}{2}s \\ 4s^2 + 6 & \end{array} \quad q_1 = \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l|l} 2s^3 + 2s & 4s^2 + 6 \\ \underline{2s^3 + 3s} & \frac{1}{2}s \\ -s & \end{array} \quad q_2 = \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l|l} 4s^2 + 6 & -s \\ \underline{4s^2} & -4s \\ 6 & \end{array} \quad q_3 = -4 < 0$$

پس $p(s)$ نه هورویتز است و نه هورویتز تغییر یافته $\Leftarrow q_3 = -4 < 0$

(c) $p(s) = 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 3$

در بررسی رفتار این چندجمله‌ای با تشکیل تابع آزمون به صورت $T(s) = \frac{3s^4 + 3s^2 + 3}{2s^3 + 2s}$، انجام بسط جزئی، مشاهده می‌شود که استخراج تک قطب های در بینهایت به بن بست منجر می‌شود و از این رو تابع آزمون در تشخیص رفتار $p(s)$ کارآمد نیست. بنابراین به جستجوی ریشه‌های $p(s)$

می پردازیم :

$$p(s)=(s^2+s+1)(3s^2-s+3)$$

با توجه به عامل $3s^2-s+3$ کاملاً مشخص است که $p(s)$ دارای ریشه در نیم صفحه راست است و در نتیجه نه هورویتز است و نه هورویتز تغییر یافته

(d) $p(s)=s^5+s^4+4s^3+2s^2+2s+1$

$$T(s)=\frac{N(s)}{M(s)}=\frac{s^5+4s^3+2s}{s^4+2s^2+1}$$

$$\begin{array}{l|l} s^5+4s^3+2s & s^4+2s^2+1 \\ \cline{2-2} s^5+2s^3+s & s \\ \hline 2s^3+s & q_1=1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l|l} s^4+2s^2+1 & 2s^3+s \\ \cline{2-2} s^4+\frac{1}{2}s^2 & \frac{1}{2}s \\ \hline \frac{3}{2}s^2+1 & q_2=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2s^3+s & \frac{3}{2}s^2+1 \\ \cline{2-2} 2s^3+\frac{4}{3}s & \frac{4}{3}s \\ \hline -\frac{1}{3}s & q_3=\frac{4}{3} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l|l} \frac{3}{2}s^2+1 & -\frac{1}{3}s \\ \cline{2-2} \frac{3}{2}s^2 & -\frac{9}{2}s \\ \hline 1 & q_4=-\frac{9}{2} \end{array}$$

$q_4=-\frac{9}{2}<0 \Rightarrow$ پس $p(s)$ نه هورویتز است و نه هورویتز تغییر یافته .

(e) $p(s)=s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1$

$$T(s)=\frac{s^5+2s^3+s}{s^4+2s^2+1}=\frac{s(s^4+2s^2+1)}{s^4+2s^2+1}$$

دیده می شود که در صورت و مخرج تابع آزمون عامل مشترک وجود دارد که عبارت است از :

$$K(s)=s^4+2s^2+1=(s^2+1)^2$$

با توجه به این که چندجمله‌ای $K(s)$ دارای ریشه موهومی غیر ساده است ، پس $p(s)$ نه هورویتز است و نه هورویتز تغییر یافته .

پاسخ تمرین های تکلیف شماره ۳ (ادامه)

(f) $p(s) = s^5 + 5s^3 + 4s$

$p(s)$ یک چندجمله‌ای فرد است پس دست بالا می‌تواند هورویتز تغییریافته باشد. از این رو تابع آزمون را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\hat{T}(s) = \frac{p(s)}{p'(s)} = \frac{s^5+5s^3+4s}{5s^4+15s^2+4} \quad , \hat{d} = 5$$

$$\begin{array}{l|l} s^5+5s^3+4s & 5s^4+15s^2+4 \\ \cline{2-2} s^5+3s^3+\frac{4}{5}s & \frac{1}{5}s \\ \hline 2s^3+\frac{16}{5}s & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 5s^4+15s^2+4 & 2s^3+\frac{16}{5}s \\ \cline{2-2} 5s^4+8s^2 & \frac{5}{2}s \\ \hline 7s^2+4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} 2s^3+\frac{16}{5}s & 7s^2+4 \\ \cline{2-2} 2s^3+\frac{8}{7}s & \frac{2}{7}s \\ \hline \frac{62}{35}s & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 7s^2+4 & \frac{62}{35}s \\ \cline{2-2} 7s^2 & \frac{7\times 35}{62}s \\ \hline 4 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} \frac{62}{35}s & 4 \\ \cline{2-2} \frac{62}{35}s & \frac{62}{35\times 4}s \\ \hline 0 & \end{array}$$

در عملیات بسط فوق به هیچ ضریب منفی مواجه نمی‌شویم و از سوی عملیات با محاسبه q_5 نهایتاً طی پنج مرحله (مطابق با $\hat{d} = 5$) به باقیمانده صفر می‌رسد؛ در نتیجه $p(s)$ هورویتز تغییریافته است.

-2

$$p(s) = (s^4+as^2+1) + (2s^3+2s)$$

$$T(s) = \frac{s^4+as^2+1}{2s^3+2s} \quad , d = 4$$

$$\begin{array}{l|l} s^4+as^2+1 & 2s^3+2s \\ \cline{2-2} s^4+s^2 & \frac{1}{2}s \\ \hline (a-1)s^2+1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 2s^3+2s & (a-1)s^2+1 \\ \cline{2-2} 2s^3+\frac{2}{a-1}s & \frac{2}{a-1}s \\ \hline \frac{2a-4}{a-1}s & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} (a-1)s^2+1 & \frac{2a-4}{a-1}s \\ \cline{2-2} (a-1)s^2 & \frac{(a-1)^2}{2a-4}s \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{2a-4}{a-1}s & 1 \\ \cline{2-2} \frac{2a-4}{a-1}s & \frac{2a-4}{a-1}s \\ \hline 0 & \end{array}$$

دیده می‌شود که حل چهار مرحله بسط جزئی به سرانجام می‌رسد، کافی است که تمام ضرایب s در بسط جزئی مثبت باشند تا $p(s)$ هورویتز باشد پس:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} > 0 \rightsquigarrow \text{شرط بدیهی} \\ \frac{2}{a-1} > 0 \rightsquigarrow a-1>0 \rightsquigarrow a>1 \\ \frac{(a-1)^2}{2a-4} > 0 \rightsquigarrow 2a-4>0 \rightsquigarrow a>2 \\ \frac{2a-4}{a-1} > 0 \rightsquigarrow \text{شرط بدیهی (با توجه به شرایط قبل)} \end{cases}$$

موقعیت مشترک a عبارت است از $a>2$

4

برای اینکه $F(s)$ به ازای مقادیر حقیقی s تابع حقیقی باشد، باید تمام ضرایب حقیقی باشند. بدین ترتیب a عددی حقیقی است. مخرج تابع $F(s)$ یک چندجمله‌ای هورویتز است و هیچ کمکی به تعیین مقدار a نمی‌کند. از طرفی هیچ کدام از ریشه‌های مخرج یا قطب‌های $F(s)$ موهومی نیستند تا لازم به محاسبه باقیمانده تابع در محل قطب باشد. در ادامه کافی است تا به بررسی شرط $\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0$ به ازای $\forall \omega$ بپردازیم.

$\operatorname{Re} F(j\omega) = M(j\omega)$ و با توجه به مشخصه بخش زوج یک تابع کسری و شرط غیرمنفی بودن آن خواهیم داشت:

$$M_1(s)M_2(s) = N_1(s)N_2(s)\Big|_{s=j\omega} \geq 0$$

$$(s^2+1)(s^2+2) - as \times 3s\Big|_{s=j\omega} = s^4+3(1-a)s^2+2\Big|_{s=j\omega} = \omega^4+3(a-1)\omega^2+2 \geq 0$$

با تغییر متغیر $\omega^2 = X$ داریم، $X^2+3(a-1)X+2 \geq 0$

منحنی معرف بخش سمت چپ نامساوی اخیر (با متغیر حقیقی مثبت X) یک سهمی رو به بالا است.

برای این که شرط مد نظر تامین گردد، کافی است تا چندجمله‌ای سمت چپ نامساوی در نقطه مینیمم خود غیرمنفی باشد، پس به محاسبه X_m می‌پردازیم:

$$2X_m + 3(a-1) = 0 \rightarrow X_m = \frac{3(1-a)}{2}$$

$$\rightarrow X^2+3(a-1)X+2\Big|_{X=X_m} = \frac{9(1-a)^2}{4} + 3(a-1) = \frac{3(1-a)}{2} + 2 \geq 0$$

$$\rightarrow -\frac{9(1-a)^2}{4} + 2 \geq 0 \rightarrow 1-\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq a \leq 1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

پاسخ تمرین های تکلیف شماره ۳ (ادامه)

3-

$$Z(s) = \frac{2s^2+s+2}{s^2+1}$$

شرط اول) اگر s حقیقی باشد، آنگاه Z(s) نیز حقیقی می گردد

شرط دوم)

تعیین قطب ها : $s^2+1=0 \rightarrow s=\pm j$

$+j$ مانده نظیر $\rightsquigarrow r_1 = Z(s)(s-j)\Big|_{s=j} = \left[\frac{2s^2+s+2}{(s+j)(s-j)}(s-j)\right]_{s=j} = \frac{1}{2}$

$-j$ مانده نظیر $\rightsquigarrow r_2 = r_1^* = \frac{1}{2}$

شرط دوم نیز برقرار است زیرا همه صفرها و قطب های Z(s) یا در LHP یا به طور ساده روی محور موهومی قرار دارند و مانده های قطب های ساده روی محور موهومی حقیقی و مثبت است

شرط سوم)

$$Z(j\omega) = \frac{-2\omega^2+j\omega+2}{-\omega^2+1} = \frac{2(1-\omega^2)+j\omega}{1-\omega^2}$$

$$\Rightarrow Re[Z(j\omega)] = 2 \geqslant 0 \quad \forall\omega$$

پس شرط سوم نیز برقرار است زیرا به ازای تمام ωها $Re[Z(j\omega)] \geqslant 0$ است.