پاسخ تکلیف شماره ۴۰

درس فیلتر و سنتز مدار

محمدعلی شفیعیان

-1

الف) $F(s) = \dfrac{s^4+5s^2+6}{s^4+3s^2+2}$

$F(s)$ نه تابع فرد است و نه اختلاف درجه صورت و مخرج آن برابر با یک.

ب) $F(s) = \dfrac{s^3+5s}{s^4+3s^2+2}$

با آنکه $F(s)$ تابع کسری و فرد است و تمام صفرها و قطب‌هایش ساده و موهومی اند، اما چون صفرها و قطب‌هایش به صورت یک درمیان روی محور موهومی قرار ندارند، پس $\frac{F(j\omega)}{j}$ نسبت به ω تابع یکنواخت افزاینده نیست.

ج) $F(s) = \dfrac{s^3+1.5s}{s^4+3s^2+2} = \dfrac{s(s^2+1.5)}{s^4+3s^2+2}$

$F(s)$ یک تابع کسری فرد است که تمام صفرها و قطب‌هایش ساده و موهومی اند. از سوی صفرها و قطب‌ها به صورت یک درمیان روی محور موهومی قرار دارند و $\frac{F(j\omega)}{j}$ به صورت یکنواخت افزاینده است. اختلاف درجه صورت و مخرج $F(s)$ یکی است و نقاط $s=0$ و $s=\infty$ صفرهای $F(s)$ هستند. به این ترتیب با برآورده شدن تمام شرایط تابع تقلیدی مدارهای بدون تلفات، $F(s)$ را می‌توان به صورت یک شبکه LC ساخت.

د) $F(s) = \dfrac{s^3+1.5s}{s^4+2s^2+1}$

$F(s)$ دارای قطب مکرر است پس تقلیدی یک شبکه LC نمی‌باشد.

ه) $F(s) = \dfrac{s(s^2+3)(s^2+6)}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$F(s)$ یک تابع کسری و به صورت نسبت یک تابع فرد به زوج است. کلیه صفرها و قطب‌های $F(s)$ به صورت ساده و یک در میان روی محور موهومی قرار دارند. بنابراین $F(s)$ معرف یک شبکه LC بدون تلفات می‌باشد.

-2

$$Z(s) = \frac{s^3+4s}{2s^4+20s^2+18}$$

از آنجایی که $Z(s)$ در $s=0$ دارای صفر است، پس سنتز را با $Y(s)$ انجام می‌دهیم:

$$Y(s) = \frac{18+20s^2+2s^4}{4s+s^3}$$

$$18+20s^2+2s^4 \;\Big|\; 4s+s^3 \qquad \frac{9}{2}s \text{ سلف سوازی}$$

$$18+\frac{9}{2}s^2$$

$$\frac{31}{2}s^2+2s^4$$

$$4s+s^3 \;\Big|\; \frac{31}{2}s^2+2s^4 \qquad \frac{8}{31}s \text{ خازن سری}$$

$$4s+\frac{16}{31}s^3$$

$$\frac{15}{31}s^3$$

$$\frac{31}{2}s^2+2s^4 \;\Big|\; \frac{15}{31}s^3 \qquad \frac{961}{30s} \text{ سلف سوازی}$$

$$\frac{31}{2}s^2$$

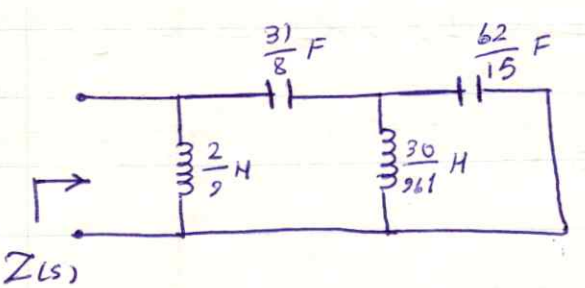
$$2s^4$$

$$\frac{15}{31}s^3 \;\Big|\; 2s^4 \qquad \frac{15}{62s} \text{ خازن سری}$$

$$\frac{15}{31}s^3$$

$$0$$

$\Rightarrow$



$Z(\infty) = 0$ $\longrightarrow$ آخرین عنصر خازن سری است.

پاسخ تمرین های تکلیف 4 (ادامه)

-3

$$Z(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s(s^2+3)(s^2+5)}$$

الف) در عنصر اول به روش کاور I و بقیه عناصر به روش کاور II

$$Y(s)=\frac{1}{Z(s)}=\frac{s(s^2+3)(s^2+5)}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{s^5+8s^3+15s}{s^4+5s^2+4}$$

$$\begin{array}{r|l} s^5+8s^3+15s & s^4+5s^2+4 \\ \hline s^5+5s^3+4s & s \\ \hline 3s^3+11s & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{r|l} s^4+5s^2+1 & 3s^3+11s \\ \hline s^4+\frac{11}{3}s^2 & \frac{1}{3}s \\ \hline \frac{4}{3}s^2+4 & \end{array}$$

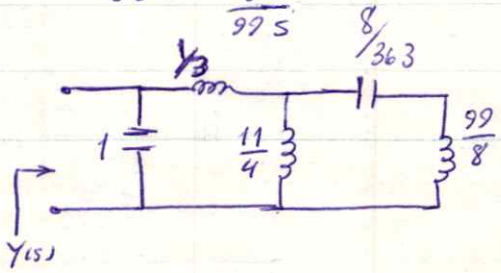
$$\rightarrow Y(s)=s+\cfrac{1}{\frac{1}{3}s+\cfrac{1}{\underbrace{\cfrac{\frac{4}{3}s^2+4}{3s^3+11s}}_{Z_1(s)}}}$$

$$Z_1(s)=\frac{3s^3+11s}{\frac{4}{3}s^2+4} \rightarrow Y_1(s)=\frac{1}{Z_1(s)}=\frac{\frac{4}{3}s^2+4}{3s^3+11s}$$

$$\begin{array}{r|l} 4+\frac{4}{3}s^2 & 11s+3s^3 \\ \hline 4+\frac{12}{11}s^2 & \frac{4}{11s} \\ \hline \frac{8}{33}s^2 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{r|l} 11s+3s^3 & \frac{8}{33}s^2 \\ \hline 11s & \frac{363}{85} \\ \hline 3s^3 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\frac{8}{33}s^2}{3s^3}=\frac{8}{99s}$$

$$\rightarrow Y_1(s)=\frac{4}{11s}+\cfrac{1}{\frac{363}{85}+\cfrac{1}{\frac{8}{99s}}}$$

$$\Rightarrow Y(s)=s+\cfrac{1}{\frac{1}{3}s+\cfrac{1}{\frac{4}{11s}+\cfrac{1}{\frac{363}{85}+\cfrac{1}{\frac{8}{99s}}}}}$$



ب) سد عنصر اول به شیوه ی لادر II و بقیه عناصر به شیوه ی لادر I

$$Z(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s(s^2+3)(s^2+5)}=\frac{s^4+5s^2+4}{s^5+8s^3+15s}$$

$$4+5s^2+s^4 \;\Big|\; 15s+8s^3+s^5 \qquad \frac{4}{15s}$$

$$\frac{4+\frac{32}{15}s^2+\frac{4}{15}s^4}{\frac{43}{15}s^2+\frac{11}{15}s^4}$$

$$\rightsquigarrow\quad 15s+8s^3+s^5 \;\Big|\; \frac{43}{15}s^2+\frac{11}{15}s^4 \qquad \frac{225}{435}$$

$$\frac{15s+\frac{165}{43}s^3}{\frac{179}{43}s^3+s^5}$$

$$\rightsquigarrow\quad \frac{43}{15}s^2+\frac{11}{15}s^4 \;\Big|\; \frac{179}{43}s^3+s^5 \qquad \frac{1849}{2685s}$$

$$\frac{\frac{43}{15}s^2+\frac{1849}{2685}s^4}{\frac{8}{179}s^4}$$

$$\Rightarrow Z(s)=\frac{4}{15s}+\cfrac{1}{\frac{225}{435}+\cfrac{1}{\frac{1849}{2685s}+\cfrac{1}{\underbrace{\frac{\frac{8}{179}s^4}{\frac{179}{43}s^3+s^5}}_{Z_1(s)}}}}$$

$$Z_1(s)=\frac{\frac{179}{43}s^3+s^5}{\frac{8}{179}s^4}=$$

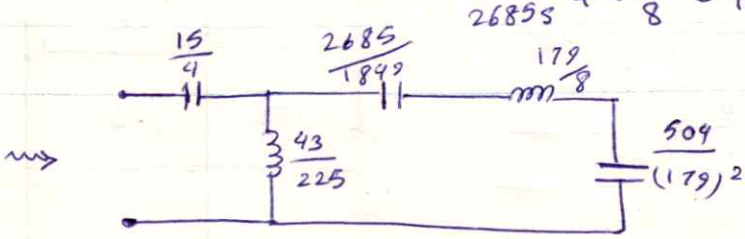
$$s^5+\frac{179}{43}s^3 \;\Big|\; \frac{8}{179}s^4 \qquad \frac{179}{8}s$$

$$\frac{s^5}{\frac{179}{43}s^3}$$

$$\rightsquigarrow\quad \frac{\frac{8}{179}s^4}{\frac{179}{43}s^3}=\frac{504}{(179)^2}s$$

$$\rightarrow Z_1(s)=\frac{179}{8}s+\frac{1}{\frac{504}{(179)^2}s}$$

$$\Rightarrow Z(s)=\frac{4}{15s}+\cfrac{1}{\frac{225}{435}+\cfrac{1}{\frac{1849}{2685s}+\frac{179}{8}s+\cfrac{1}{\frac{(504)}{(179)^2}s}}}$$



پاسخ تمرین های تکلیف شماره 4 (ادامه)

ج)

عنصر اول به روش کاور I، عنصر دوم به روش کاور 2 و باقیمانده عناصر هم روش فوستر I

$$\begin{array}{r|l} S^5+8S^3+15S & S^4+5S^2+4 \\ \hline S^5+5S^3+4S & S \\ \hline 3S^3+11S & \end{array}$$

در شیوه کاور I، $S=\infty$ قطب $Y(S)$ است پس:

$$\Rightarrow Y(S)=S+\frac{3S^3+11S}{S^4+5S^2+4}=S+\hat{Y}(S)$$

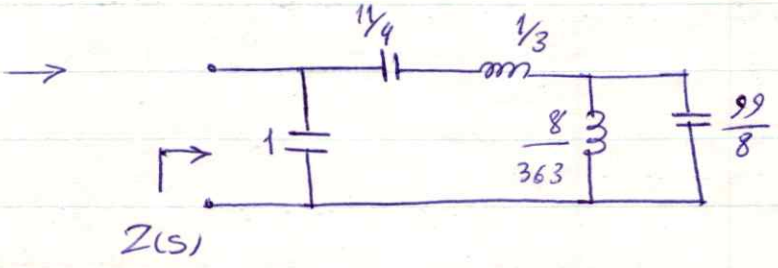
در شیوه کاور II، $S=0$ قطب $\hat{Z}(S)=\frac{1}{\hat{Y}(S)}$ است، پس:

$$\begin{array}{r|l} 4+5S^2+S^4 & 11S+3S^3 \\ \hline 4+\frac{12}{11}S^2 & \frac{4}{11S} \\ \hline \frac{43}{11}S^2+S^4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \hat{Z}(S)=\frac{4}{11S}+\frac{S^3+\frac{43}{11}S}{3S^2+11}=\frac{4}{11S}+\hat{\hat{Z}}(S)$$

در شیوه فوستر I، تابع امپدانس $\hat{Z}(S)$ را بسط می دهیم:

$$\hat{\hat{Z}}(S)=\frac{S}{3}+\frac{\frac{8}{33}S}{3S^2+11}=\frac{S}{3}+\frac{1}{\frac{99}{8}S+\frac{363}{8S}}$$



4-

برای آنکه $F(S)$ شرایط تابع تقلیل دار LC را داشته باشد، باید تمام صفرها و قطب هایش موهومی، ساده و یک در میان باشند.

محاسبه صفرها: $S^4+aS^2+1.5=0 \Rightarrow S^2=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-6}}{2}$

←

در نظر داشته باشید که $F(s)$ در $s=0$ صفر می‌شود و عامل‌های مخرج قطب‌های $F(s)$ عبارتند از: s^2+1 و s^2+2

شرط اول: $a^2-6>0$

(a^2-6 را نمی‌توان مساوی صفر قرار داد و تابع $F(s)$ دارای صفر مکرر نباشد)

شرط دوم:
$$\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{a^2-6}}{2} > 2 \\ 1 < \dfrac{a-\sqrt{a^2-6}}{2} < 2 \end{cases}$$

با این ترتیب صفرها و قطب‌ها متقارن روی محور موهومی قرار می‌گیرند.

شرط اول: $a>\sqrt{6}$ یا $a<-\sqrt{6}$

شرط دوم: $a+\sqrt{a^2-6}>4 \rightarrow \sqrt{a^2-6}>4-a \rightarrow a>\frac{11}{4}$

$$2<a-\sqrt{a^2-6}<4 \rightarrow a-4<\sqrt{a^2-6}<a-2 \rightarrow a<\frac{5}{2}$$

اشتراک شرایط فوق یک مجموعه تهی است. به عبارتی به ازای هیچ مقداری از a شرایط مورد نظر برآورده نمی‌شود و در نهایت $F(s)$ نمی‌تواند تابع یک شبکه LC باشد.