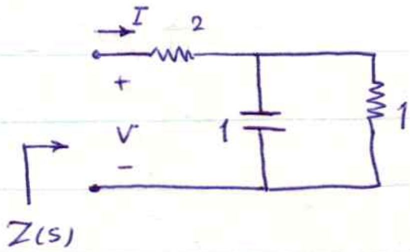
پاسخ تمرین‌های تکلیف شماره ۵

درس فیلتر و سنتز مدار

محمدعلی شفیعیان

-1



الف) $Z(s)=2+\frac{1}{s+1}=\frac{2s+3}{s+1}$

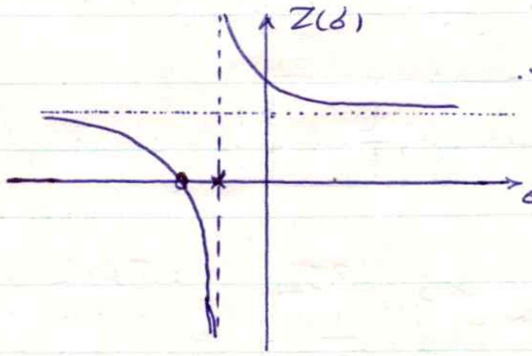
ب- بررسی ویژگی‌های $Z(s)$:

$Z(s)$ در $s_p=-1$ و $s_z=-\frac{3}{2}$ دارای صفر و قطب حقیقی، منفی و ساده است.

باقیمانده $Z(s)$ در محل قطب، حقیقی و مثبت است :

$$k_{-1}=(s+1)Z(s)\Big|_{s=-1}=2s+3\Big|_{s=-1}=1$$

$Z(s)$ در $s=\infty$ دارای قطب نیست و با توجه به موقعیت صفر و قطب آن، به نحوی که قطب به مبدأ نزدیک‌تر است، مشهود است که $Z(s)$ در طول محور حقیقی رفتاری یکنواخت کاهنده دارد (مگر در محل قطب).



همچنین، تعداد صفرها و قطب‌های $Z(s)$ برابر است.

مقدار نهایی $Z(s)$ در $s=\infty$ محدود است

و داریم :

$$Z(\infty)=2<3=Z(0)$$

و در ادامه :

$$Re\left\{Z(j\omega)\right\}=Re\left\{\frac{j2\omega+3}{j\omega+1}\right\}=\frac{2\omega^2+3}{1-\omega^2}$$

$$\frac{d}{d\omega}Re\left\{Z(j\omega)\right\}=-8\omega^3-10\omega/(1-\omega^2)^2\ \leq 0 \qquad \forall|\omega|$$

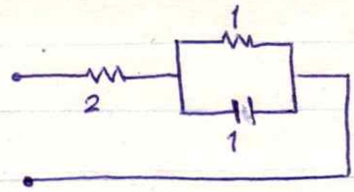
پس $Re\left\{Z(j\omega)\right\}$ به ازای $|\omega|$ به طور یکنواخت کاهنده است

ج- اینک به روش‌های چهارگانه فوستر و کائر اقدام به ساخت تابع امپدانس $Z(s)$ می‌کنیم :

- فوستر I :

$$Z(s) = 2 + \frac{1}{s+1}$$

$\rightarrow$



- فوستر II :

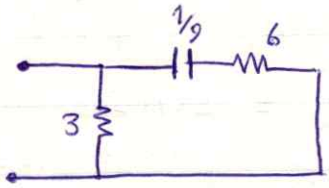
$$Y(s) = \frac{s+1}{2s+3}$$

$$\rightarrow \frac{Y(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s+3}$$

$$A = Y(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = (2s+3)\,\frac{Y(s)}{s}\Big|_{s=-3/2} = \frac{1}{3}$$

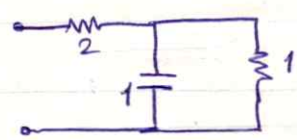
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 + 9/s} \rightsquigarrow$$



- کائر I :

$$\begin{array}{l|l} 2s+3 & s+1 \\ \underline{2s+2} & 2 \\ 1 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} s+1 & 1 \\ \underline{s} & s \\ 1 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 1 & 1 \\ \underline{1} & 1 \\ 0 & \end{array}$$

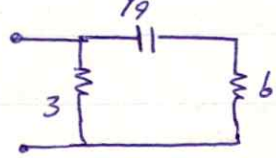
$\rightarrow$



- کائر II :

$$\begin{array}{l|l} 1+s & 3+2s \\ \underline{1+\frac{2}{3}s} & 1/3 \\ s/3 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 3+2s & \frac{1}{3}s \\ \underline{3} & 9/s \\ 2s & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} \frac{1}{3}s & 2s \\ \underline{\frac{1}{3}s} & \frac{1}{6} \\ 0 & \end{array}$$

$\rightarrow$



پاسخ تمرین های تکلیف شماره ۵ (ادامه)

2-

الف)

$$Z(s) = \frac{s+a}{s^2+3s+2} = \frac{s+a}{(s+2)(s+1)}$$

a باید مقداری حقیقی، منفی و مخالف 1- و 2- باشد. علاوه بر این، به خاطر موقعیت یک در میان بودن صفرها و قطب های Z(s) باید $-2 < a < -1$ باشد.

ب)

$$Z(s) = \frac{s^4+4s+a}{s^2+3s+2} = \frac{s^4+4s+a}{(s+2)(s+1)}$$

با توجه به خواص Z(s)، ریشه های s^4+4s+a باید حقیقی، منفی و مخالف 1-، 2- باشند. علاوه بر این،

$$-2 < s_1 < -1 \quad , \quad s_2 < -2$$

با توجه به این شرایط به تعیین محدوده a اقدام می کنیم:

$$s^4+4s+a = 0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16-4a}$$

$$\rightarrow 16-4a \geq 0 \rightarrow 4a < 16 \rightarrow a < 4 \quad (1)$$

$$-2 < -2 + \frac{1}{2}\sqrt{16-4a} < -1 \rightarrow 0 < \sqrt{16-4a} < 2 \rightarrow 0 < 16-4a < 4$$

$$\rightarrow 3 < a < 4 \quad (2)$$

$$-2 - \frac{1}{2}\sqrt{16-4a} < -2 \rightarrow \sqrt{16-4a} > 0 \rightarrow a < 4 \quad (3)$$

اشتراک نواحی (1)، (2)، (3) عبارتست از:

$$3 < a < 4$$

3-

$$Z(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{s^2+6s+8}{s^3+9s^2+23s+15}$$

برای استفاده از روش کائر I، در $s=\infty$ رفتار Z(s) را بررسی می کنیم. در $s=\infty$ تابع Z(s)

دارای صفر است، پس برای استخراج قطب در $s=\infty$ ، $Y(s)$ را مبنای عملیات قرار میدهیم:

$$\begin{array}{r|l} S^3+9S^2+23S+15 & S^2+6S+8 \\ \hline S^3+6S^2+8S & S \\ \hline 3S^2+15S+15 & \end{array}$$

S خازن موازی

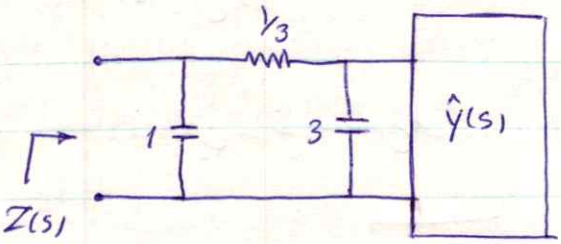
$$\rightarrow \begin{array}{r|l} S^2+6S+8 & 3S^2+15S+15 \\ \hline S^2+5S+5 & \frac{1}{3} \\ \hline S+3 & \end{array}$$

$\frac{1}{3}$ مقاومت سری

$$\rightarrow \begin{array}{r|l} 3S^2+15S+15 & S+3 \\ \hline 3S^2+9S & 3S \\ \hline 6S+15 & \end{array}$$

$3S$ خازن موازی

$$\Rightarrow Y(s) = S + \cfrac{1}{\cfrac{1}{3} + \cfrac{1}{3S + \underbrace{\cfrac{1}{\cfrac{S+3}{6S+15}}}_{\hat{Y}(s)}}}$$



$$\rightarrow \hat{Y}(s) = \frac{6S+15}{S+3}$$

برای تکمیل عملیات تحقق تابع اولیه به روش کائر II ، باید رفتار $\hat{Y}(s)$ را در $s=0$ بررسی کنیم. در $s=0$ ، $\hat{Y}(s)$ مقدار محدودی دارد، و در روش کائر II باید این مقاومت به صورت موازی بیرون کشیده شود، پس:

$$\begin{array}{r|l} 15+6S & 3+S \\ \hline 15+5S & 5 \\ \hline S & \end{array}$$

5 مقاومت موازی

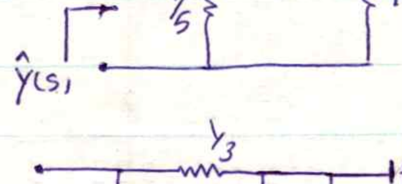
$$\rightarrow \begin{array}{r|l} 3+S & S \\ \hline 3 & \frac{3}{S} \\ \hline S & \end{array}$$

$\frac{3}{S}$ خازن سری

$$\rightarrow \begin{array}{r|l} S & S \\ \hline S & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

1 مقاومت موازی

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

پاسخ تمرین‌های تکلیف شماره ۵ (ادامه)

4-

$$Z(s)=\underbrace{\frac{(s^2+4)(s^2+6)}{s(s^2+5)}}_{Z_{Lc}(s)}+\underbrace{\frac{(s+3)}{(s+1)(s+5)}}_{Z_{RC}(s)}$$

در چنین مسایلی به تحقق جداگانه مدارهای RC، LC می‌پردازیم و با توجه به نوع آن (امپدانس یا ادمیتانس بودن) مدارهای به دست آمده را سری یا موازی می‌کنیم.

$$Z_{Lc}(s)=\frac{(s^2+4)(s^2+6)}{s(s^2+5)}$$

تحقق به روش فوستر I $\longrightarrow$ $$\frac{Z_{Lc}(s)}{s}=\frac{(s^2+4)(s^2+6)}{s^2(s^2+5)}\ \underline{\underline{s^2=x}}\ \frac{\overbrace{(x+4)(x+6)}^{x^2+10x+24}}{x(x+5)}$$

$$=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}$$

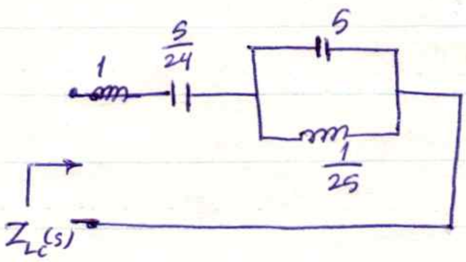
$$A=x\left.\frac{x^2+10x+24}{x(x+5)}\right|_{x=0}=\frac{24}{5}$$

$$B=(x+5)\left.\frac{x^2+10x+24}{x(x+4)}\right|_{x=-5}=\frac{1}{5}$$

$$\rightarrow Z_{Lc}(s)=s+\frac{24/5}{s}+\frac{\frac{1}{5}s}{s^2+5}=s+\frac{1}{\frac{5}{24}s}+\frac{1}{5s+\frac{25}{s}}$$

$$=s+\frac{1}{\frac{5}{24}s}+\frac{1}{5s+\frac{1}{\frac{1}{25}s}}$$

$\leftarrow$



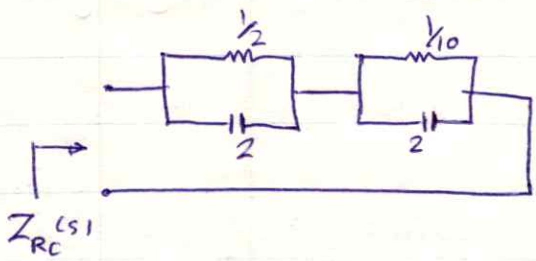
$$Z_{RC}(s)=\frac{(s+3)}{(s+1)(s+5)}$$

تحقق به روش فوستر I $\longrightarrow$ $$Z_{RC}(s)=\frac{A_1}{s+1}+\frac{B_1}{s+5}$$

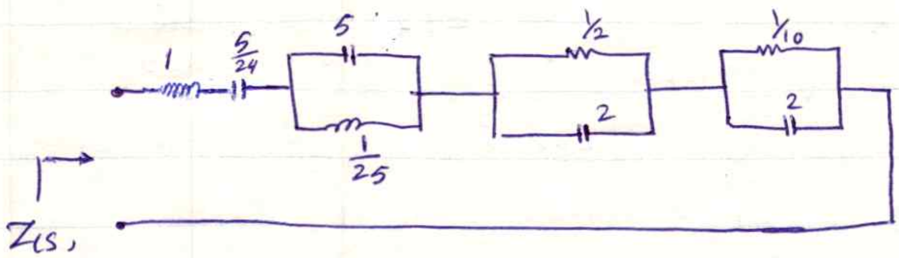
$$A_1 = (s+1)\, Z_{RC}(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$B_1 = (s+5)\, Z_{RC}(s)\Big|_{s=-5} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow Z_{RC}(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+5} = \frac{1}{2s+2} + \frac{1}{2s+\frac{5}{2}}$$



$$Z(s) = Z_{LC}(s) + Z_{RC}(s)$$



* * به عنوان تمرین تابع ادمیتانس $Y(s)$ را به صورتی مشابه به صورت یک شبکه مداری RLC بسازید.

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+5)}{s(s^2+3)} + \frac{(s+1)(s+5)}{(s+3)}$$