مدارهای منطقی

فصل اول

سیستم‌های اعداد و سیستم باینری

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

سیستم اعداد

یک سیستم عددی، کُدی است که از نمادهای خاصی برای مشخص کردن تعدادی از مقادیر با ارزش استفاده می‌کنند.

سیستم اعداد دهدهی (Decimal)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$5672 = 5000 + 600 + 70 + 2$$

یک عدد در مبنای ۱۰ مثل 5672 مقداری معادل ۵ هزارتایی، ۶ صدتایی به‌علاوه ۷ ده‌تایی و ۲ یکی است.

$$5672 = 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

سیستم اعداد

نمایش کلی یک عدد در مبنای ده

$$a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0\ .\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \cdots$$

که:

ارزش مکان هر رقم: j $\qquad a_j = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\cdots, 9$

سیستم اعداد باینری (Binary)

در سیستم اعداد باینری (دودویی) فقط دو مقدار **0** و **1** وجود دارد

سیستم اعداد

تبدیل یک عدد از مبنای غیر ده به مبنای ده

به‌طو کلی یک عدد در مبنای **r** به‌صورت حاصل‌ضرب توان‌های **r** در ضرایب مربوطه مطابق زیر بیان می‌شود:

$$(\underbrace{a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ \cdots\ a_0}_{\text{n رقم صحیح}}\ .\ \underbrace{a_{-1}\ a_{-2}\ \cdots\ a_{-m}}_{\text{m رقم اعشاری}}\ )_r$$

$$= (a_n \times r^n + a_{n-1} \times r^{n-1} + \ \cdots + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-m})_{10}$$

$$= \left(\sum_{j=-m}^{n} a_j \times r^j \right)_{10}$$

سیستم اعداد

تبدیل یک عدد از مبنای غیر ده به مبنای ده

به‌طو کلی یک عدد در مبنای r به‌صورت حاصل‌ضرب توان‌های r در ضرایب مربوطه مطابق زیر بیان می‌شود:

$$(a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2}\, \cdots\, a_0\, .\, a_{-1}\, a_{-2}\, \cdots\, a_{-m}\,)_r$$

مبنای ۱۰ : $a_j = 0, 1, 2, \cdots, 9$

مبنای ۲ : $a_j = 0, 1$

مبنای ۳ : $a_j = 0, 1,2$

مبنای ۸ : $a_j = 0, 1,2, \cdots, 7$

مبنای ۱۶ : $a_j = 0, 1,2, \cdots, 9, A, B, C, D, E, F$

سیستم اعداد

مثال: معادل دهدهی اعداد زیر را به‌دست آورید:

$$(4121.2\,)_5 = 4 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = (536.4\,)_{10}$$

$$(A65E\,)_{16} = 10 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 14 = (42590\,)_{10}$$

$$(257.2)_8 = 2 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 + 2 \times 8^{-1} = (175.25\,)_{10}$$

$$(1FA.C)_{16} = 1 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 10 + 12 \times 16^{-1} = (506.75\,)_{10}$$

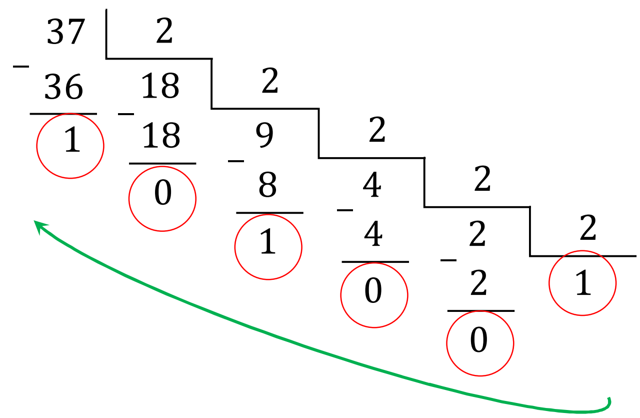
$$(1011001.101)_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} = (89.625\,)_{10}$$

سیستم اعداد

تبدیل یک عدد از مبنای ده به مبنای غیر ده

برای یک عدد غیر اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای r قسمت صحیح عدد را متوالیاً به r تقسیم می‌کنیم:

$(37)_{10} = (\ ?\ )_2$



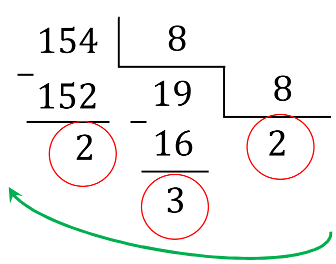
$(37)_{10} = (100101)_2$

سیستم اعداد

تبدیل یک عدد از مبنای ده به مبنای غیر ده

برای یک عدد غیر اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای r قسمت صحیح عدد را متوالیاً به r تقسیم می‌کنیم:

$(154)_{10} = (\ ?\ )_8$



$(37)_{10} = (232)_8$

سیستم اعداد

تبدیل یک عدد از مبنای ده به مبنای غیر ده

برای یک عدد اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ (غیر ده) به جای تقسیم متوالی از ضرب متوالی استفاده می‌کنیم به این صورت که قسمت اعشاری عدد را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$(0.6875\,)_{10} = (\ ?\ \ )_2$

$$0.6875 \times 2 = 1.375 = \overset{a_{-1}}{1} + 0.375$$

$$0.375 \times 2 = 0.75 = \overset{a_{-2}}{0} + 0.75$$

$$0.75 \times 2 = 1.5 = \overset{a_{-3}}{1} + 0.5$$

$$0.5 \times 2 = 1 = \overset{a_{-4}}{1} + 0$$

$$(0.6875\,)_{10} = (0.1011)_2$$

سیستم اعداد

تبدیل یک عدد از مبنای ده به مبنای غیر ده

برای یک عدد اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ (غیر ده) به جای تقسیم متوالی از ضرب متوالی استفاده می‌کنیم به این صورت که قسمت اعشاری عدد را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$(0.513\,)_{10} = (\ ?\ \ )_8$

$$0.513 \times 8 = 4.104 = \overset{a_{-1}}{4} + 0.104$$

$$0.104 \times 8 = 0.832 = \overset{a_{-2}}{0} + 0.832$$

$$0.832 \times 8 = 6.565 = \overset{a_{-3}}{6} + 0.656$$

$$0.656 \times 8 = 5.248 = \overset{a_{-4}}{5} + 0.248$$

$$(0.6875\,)_{10} = (0.4065)_8$$

سیستم اعداد

تبدیل یک عدد از مبنای ده به مبنای غیر ده

برای یک عدد با قسمت صحیح و اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای r (غیر ده) باید قسمت صحیح و کسری را به‌طور مجزا تبدیل کرد و سپس دو جواب را با هم ترکیب نمود:

$(151.513\ )_{10} = (\ ?\ \ )_8$

151 | 8
−144 | 18 | 8
7 | −16 | 2
2

$(151\ )_{10} = (227)_8$

$(0.513\ )_{10} = (0.4065)_8$

$(151.513\ )_{10} = (227.4065)_8$

تبدیل بین مبناهای r و r^n

مبناهای r و r^n را می‌توان مستقیماً به هم تبدیل کرد، مثلاً مبناهای (۲ و ۴)، (۲ و ۸)، (۲ و ۱۶)، (۴ و ۱۶) و (۳ و ۹) مستقیماً قابل تبدیل به یکدیگر هستند.

برای تبدیل از مبنای r^n به r به ازای هر رقم، n رقم در مبنای r قرار می‌دهیم

و

برای تبدیل از مبنای r به r^n قسمت صحیح را از سمت راست و قسمت اعشار را از سمت چپ به‌صورت دسته‌های n رقمی جدا می‌کنیم و معادل هر دسته را در مبنای r^n می‌نویسیم.

تبدیل بین مبناهای دو، هشت، شانزده

$(127543)_8 = (?)_2$

روش اول: تبدیل از مبنای ۸ به ۱۰ و سپس از مبنای ۱۰ به ۲

روش دوم: هر عدد در مبنای ۸ معادل ۳ رقم در مبنای ۲ (۲^۳=۸) و هر رقم در مبنای ۱۶ معادل ۴ رقم در مبنای ۲ (۲^۴=۱۶) است.

$(127543)_8 = (001010111101100011)_2$

$(001010111101100011)_2 = (\ ?\ )_{16}$

$00\ (001010111101100011)_2 = (AF63)_{16}$

$(10110.1110)_2 = (\ ?\ )_8 = (\ ?\ )_{16}$

$(10110.1110)_2 = (\ 26.7\ )_8$

$(10110.1110)_2 = (\ 16.E\ )_{16}$

تبدیل بین مبناهای دو، هشت، شانزده

مبنای ۱۶	مبنای ۲	مبنای ۴
0	0000	00
1	0001	01
2	0010	02
3	0011	03
4	0100	10
5	0101	11
6	0110	12
7	0111	13
8	1000	20
9	1001	21
A	1010	22
B	1011	23
C	1100	30
D	1101	31
E	1110	32
F	1111	33

مبنای ۸	مبنای ۲
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

مبنای ۹	مبنای ۳
0	00
1	01
2	02
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22

تبدیل بین مبناهای دو، هشت، شانزده

$(73.2)_8 = (\ ?\ )_2$ $\quad (73.2)_8 = (111011.010)_2$

$(307.D)_{16} = (001100000111.1101)_2 = (110000011.1101)_2$

$(457.632)_8 = (100101111.110011010)_2$

$(F4E.8C)_{16} = (111101001110.10001100)_2$

$(B2DA.87)_{16} = (23023122.2013)_4$

$(73852)_9 = (2110221202)_3$

$(1011.1011)_2 = (001011.101100)_2 = (13.54)_8$

$(21011.212)_3 = (021011.2120)_3 = (234.76)_9$

عملیات جمع، تفریق و ضرب باینری

$$
\begin{array}{r}
\scriptstyle 1\ 1\ 1\ \ \ 1\ \ \ \\
1\,0\,1\,1\,0\,1 \\
+\ 0\,1\,1\,1\,0\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,1\,0\,1\,0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\scriptstyle 0\ 2 \\
1\,0\,1\,1\,\cancel{1}\,\cancel{0} \\
-\ 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\
\hline
0\,0\,1\,0\,0\,1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1\,1\,0\,1 \\
\times\ \ 1\,0\,1 \\
\hline
1\,1\,0\,1 \\
+\ 0\,0\,0\,0\,0 \\
+\ 1\,1\,0\,1\,0\,0 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,0\,0\,1
\end{array}
$$

مکمل‌های اعداد (Complements)

اگر عدد N
- مکمل مبنا یا مکمل r (Radix Complement)
- مکمل در مبنای کاهش یافته یا مکمل r-1 (reduced Complement)

اگر عدد N در مبنای r شامل n رقم باشد:
- مکمل مبنا = $r^n - N$
- مکمل در مبنای کاهش یافته = $(r^n - 1) - N$

محاسبه مکمل مبنای کاهش یافته بسیار ساده‌تر است، اما در محاسبات مکمل مبنا کاربرد دارد

مکل مبنا = مکمل مبنای کاهش یافته + ۱

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل r-1 اعداد

اگر عدد N در پایه r دارای n رقم باشد، مکمل r-1 عدد طبق تعریف برابر (r^n-1)-N می‌باشد.

مکمل ۹ عدد N : $(10^n - 1) - N \longrightarrow$ r = 10 **: در سیستم دهدهی**

$$10^1 = 10 \qquad 10^1 - 1 = 9$$
$$10^2 = 100 \qquad 10^2 - 1 = 99$$
$$10^3 = 1000 \qquad 10^3 - 1 = 999$$
$$10^4 = 10000 \qquad 10^4 - 1 = 9999$$

برای به‌دست آوردن مکمل ۹ عدد N بایستی تک تک ارقام عدد N را از ۹ کم کنیم

$10^n \longrightarrow$ ترکیبی از یک ۱ و nتا صفر در سمت راست

$10^n - 1 \longrightarrow$ ترکیبی از nتا ۹

$$N = 379 \xrightarrow{\text{مکمل۹}} 999 - 379 = 620$$

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل r-1 اعداد

اگر عدد N در پایه r دارای n رقم باشد، مکمل r-1 عدد طبق تعریف برابر $(r^n-1)-N$ می‌باشد.

در اعداد باینری : r = 2 $\longrightarrow$ مکمل ۲ عدد N: $(2^n-1)-N$

برای به‌دست آوردن مکمل ۱ عدد باینری N بایستی تک تک ارقام عدد N را از ۱ کم کنیم

$$2^1 - 1 = 1 = (1)_2 \qquad 2^1 = 2 = (10)_2$$

$$2^2 - 1 = 3 = (11)_2 \qquad 2^2 = 4 = (100)_2$$

$$2^3 - 1 = 7 = (111)_2 \qquad 2^3 = 8 = (1000)_2$$

$$2^4 - 1 = 15 = (1111)_2 \qquad 2^4 = 16 = (10000)_2$$

ترکیبی از n تا ۱ $\longleftarrow$ $2^n - 1$ ترکیبی از یک ۱ و n تا صفر در سمت راست $\longleftarrow$ 2^n

مکمل ۱ عدد باینری N، با تبدیل یک‌ها به صفر و صفرها به یک حاصل می‌شود

$$N = 1010 \xrightarrow{\text{مکمل ۱}} 1111 - 1010 = 0101$$

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل r-1 اعداد

- برای به‌دست آوردن مکمل ۹ عدد N بایستی تک تک ارقام عدد N را از ۹ کم کنیم.
- مکمل ۱ عدد باینری N، با تبدیل یک‌ها به صفر و صفرها به یک حاصل می‌شود.

نتیجه: مکمل r-1 اعداد در مبنای ۸ و ۱۶ با تفریق هر رقم آنها به ترتیب از 7 و F حاصل می‌شود.

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل r اعداد

طبق تعریف، مکمل r عدد n رقمی N در پایه r برابر با $r^n - N$ می‌باشد، پس مکمل r یک عدد برابر است با مکمل r-1 آن به‌علاوه یک

بنابراین مکمل ۱۰ هر عدد دهدهی برابر با مکمل ۹ به‌علاوه یک می‌باشد.

همچنین مکمل ۲ هر عدد باینری برابر با مکمل ۱ به‌علاوه یک می‌باشد.

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل r اعداد

از آنجا که نمایش عدد 10^n به‌صورت یک ۱ و n صفر در سمت راست می‌باشد، لذا مکمل ۱۰ عدد N که برابر با $10^n - N$ می‌باشد را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

- از سمت راست، کم ارزشترین رقم‌های صفر بدون تغییر می‌مانند.
- اولین رقم سمت راست که صفر نیست از ۱۰ تفریق می‌شود.
- بقیه رقم‌ها از ۹ تفریق می‌شود.

$$N = 17800 \xrightarrow{\text{مکمل ۱۰}} 82200$$

$$N = 5352 \xrightarrow{\text{مکمل ۱۰}} 4648$$

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل r اعداد

به‌طور مشابه، مکمل ۲ اعداد نیز به طریق زیر به‌دست می‌آید:

- **از سمت راست، کم ارزشترین رقم‌های صفر بدون تغییر می‌مانند.**
- **اولین رقم یک ازسمت راست بدون تغییر می‌ماند.**
- **در بقیه رقم‌ها صفربه یک و یک به صفر تبدیل می‌شود.**

$N = 10100$

روش اول : مکمل ۲ = مکمل ۱ +۱ $\longrightarrow$ مکمل ۱ : $01011 \xrightarrow{\text{مکمل۲}} 01100$

روش دوم : $N = 10100 \xrightarrow{\text{مکمل۲}} 01100$

مکمل‌های اعداد (Complements)

نکته اول:

اگر عدد N دارای ممیز باشد، به‌طور موقت ممیز را حذف کرده و مکمل r و r-1 آن را به‌دست می‌آوریم، سپس ممیز را در همان مکان نسبی اولیه قرار می‌دهیم

نکته دوم: **مکمل مکمل عدد برابر با خود عدد می‌گردد**

$$N \xrightarrow{\text{مکمل r}} r^n - N \xrightarrow{\text{مکمل r}} r^n - (r^n - N) = N$$

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل 10 عدد 546700 برابر است با

$10^6 – 546700 = 1000000 – 546700 = 453300$

مکمل 9 عدد 546700 برابر است با

$(10^6 – 1) – 546700 = 999999 – 546700 = 453299$

روش دیگر محاسبه مکمل 10 عدد 546700 استفاده از مکمل 9 است

$453299 + 1 = 453300$

مکمل‌های اعداد (Complements)

مکمل 2 عدد 1101100 برابر است با

$2^7 – 1101100 = (10000000 – 1101100)_2 = 0010100$

مکمل 1 عدد 1101100 برابر است با

$(2^7 – 1) – 1101100 = (1111111 – 1101100)_2 = 0010011$

روش دیگر محاسبه مکمل 2 عدد 1101100 استفاده از مکمل 1 است

$0010011 + 1 = 0010100$

تفریق به روش مکمل‌ها

استفاده از روش مکمل‌ها نسبت به روش قرضی در هنگام عمل تفریق برای ماشین راحت‌تر است

تفریق دو عدد n رقمی بدون علامت به‌صورت $M-N$ در پایه r را می‌توان به روش زیر انجام داد:

۱- به مفروق‌منه M مکمل r مفروق N اضافه می‌شود:

$$M+(r^n-N)=M-N+r^n$$

۲- اگر $M \geq N$ باشد، مجموع یک بیت نقلی نهایی r^n تولید خواهد کرد که از آن صرفنظر می‌شود. در نتیجه تنها $M-N$ باقی می‌ماند.

۳- اگر $M < N$ باشد مجموع بیت نقلی نهایی را تولید نمی‌کند و برابر با $r^n-(N-M)$ یعنی مکمل r عدد $N-M$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن جواب به‌صورت معمولی می‌توان مکمل r مجموع را به‌دست آورد و یک علامت منفی جلوی آن قرار داد.

تفریق به روش مکمل‌ها

مثال: با به‌کار بردن مکمل ۱۰، تفریق 8252-3260 را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} 8252 \\ -\ 3260 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8252 \\ +\ 6740 \\ \hline \cancel{1}4992 \end{array}$$

بیت نقلی نهایی

$(M-N)+\cancel{r^n}$

8252 – 3260 = 4992

تفریق به روش مکمل‌ها

مثال: با به‌کار بردن مکمل ۱۰، تفریق 420-2532 را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} 2532 \\ -\ 0420 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2532 \\ +\ 9580 \\ \hline \cancel{1}2112 \end{array}$$

بیت نقلی نهایی

2532-420 = 2112

تفریق به روش مکمل‌ها

مثال: با به‌کار بردن مکمل ۱۰، تفریق 7532-4550 را انجام دهید.

$$\begin{array}{r} 4550 \\ -\ 7532 \\ \hline ? \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4550 \\ +\ 2468 \\ \hline 7018 \end{array}$$

$r^n - (N - M)$

مکمل ۱۰

2982

4550 – 7532 = -2982

$$M + (r^n - N) = M - N + r^n \xrightarrow{\text{مکمل } r} N - M$$

تفریق به روش مکمل‌ها

تفریق‌های باینری:

X = 11001 X – Y = ?

Y = 10011 Y – X = ?

X – Y = ?

$$\begin{array}{r} 11001 \\ -\ 10011 \\ \hline ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 11001 \\ +\ 01101 \\ \hline \cancel{1}00110 \end{array}$$

بیت نقلی نهایی

X – Y = 11001 – 10011 = 00110

Y – X = ?

$$\begin{array}{r} 10011 \\ -\ 11001 \\ \hline ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 10011 \\ +\ 00111 \\ \hline 11010 \end{array} \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} 00110$$

$r^n - (N - M)$

Y – X = 10011 – 11001 = -110

تفریق به روش مکمل‌ها

تفریق به روش مکمل r-1

$$\begin{array}{r} 8252 \\ -\ 3260 \\ \hline ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 8252 \\ +\ 6739 \\ \hline \cancel{1}4991 \\ +\ 1 \\ \hline 4992 \end{array}$$

8252 – 3260 = 4992

$$M - N = M + \left((r^n - 1) - N\right)$$
$$= (M - N) + (r^n - 1) + 1 = (M - N) + \cancel{r^n}$$
$$= M - N$$

$$\begin{array}{r} 4550 \\ -\ 7532 \\ \hline ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 4550 \\ +\ 2467 \\ \hline 7017 \end{array} \xrightarrow{\text{مکمل ۹}} 2982$$

4550 – 7532 = -2982

$$M - N = M + \left((r^n - 1) - N\right)$$
$$= M - N + r^n - 1 = \underbrace{(r^n - 1) - (N - M)}_{N - M \text{ عدد } r-1 \text{ مکمل}}$$
$$\downarrow \text{مکمل } r-1$$
$$(N - M) = -(M - N)$$

اعداد علامت‌دار

– در حالت طبیعی سیستم اعداد انتخاب شده برای نمایش اعداد باید بتواند هم اعداد بدون علامت و هم اعداد علامت دار را نمایش دهد.

– در ریاضیات، اعداد منفی با علامت منها و اعداد مثبت با علامت بعلاوه نشان داده می‌شوند؛ ولی در کامپیوتر همه چیز را باید به‌وسیله رقم‌های باینری نمایش داد.

– اعداد باینری را به دو صورت باعلامت یا بدون علامت می‌توان نشان داد.

– سه روش برای نمایش اعداد علامت دار وجود دارد:

✓ نمایش بصورت مقدار ـ علامت.

✓ نمایش بصورت مکمل یک.

✓ نمایش بصورت مکمل دو.

اعداد علامت‌دار

روش مقدار علامت

در اعداد علامت‌دار به این روش، معمول این است که سمت چپ‌ترین بیت به‌عنوان بیت علامت شناخته می‌شود که اگر صفر باشد معرف عدد مثبت و اگر یک باشد معرف عدد منفی است؛ ولی در اعداد بدون علامت، بیت سمت چپ پرارزش‌ترین بیت در آن عدد می‌باشد.

1 1 0 0 0 0 0 0

پرارزش‌ترین بیت
MSB (Most Significant Bit)

کم‌ارزش‌ترین بیت
LSB (Least Significant Bit)

اعداد علامت‌دار

مثال:

مجموعه اعداد ۸ بیتی در سیستم بدون علامت

0 0 0 0 0 0 0 0 ⟶ 0

1 1 1 1 1 1 1 1 ⟶ $255 = 2^8 - 1$

مجموعه اعداد ۸ بیتی در سیستم مقدار– علامت

0 1 1 1 1 1 1 1 ⟶ -127

0 0 0 0 0 0 0 0 ⟶ 0

0 1 1 1 1 1 1 1 ⟶ 127

اعداد علامت‌دار

روش مکمل علامت

برای نمایش منفی یک عدد از روش مکمل ۱ یا مکمل ۲ آن عدد استفاده می‌شود. برای این منظور از عدد مثبت، مکمل ۱ یا مکمل ۲ می‌گیریم.

چون اعداد مثبت همیشه با صفر در سمت چپشان شروع می‌شوند لذا مکمل آن‌ها همواره با یک از سمت چپشان آغاز می‌گردد که بیانگر عدد منفی است.

اعداد علامت‌دار

مثال: اعداد 9+ و 9- را به صورت یک عدد باینری مبنای ۲ با استفاده از ۳ روش بیان‌شده و با استفاده از ۸ بیت نمایش دهید:

تنها یک روش برای نمایش عدد 9+ وجود دارد:

0	0	0	0	1	0	0	1

برای عدد 9- سه روش نمایش وجود دارد:

روش اندازه – علامت:

1	0	0	0	1	0	0	1

روش مکمل یک:

1	1	1	1	0	1	1	0

روش مکمل دو:

1	1	1	1	0	1	1	1

جمع حسابی در اعداد با علامت

جمع دو عدد در سیستم مقدار – علامت، مانند جمع حسابی معمولی است به این صورت که:

اگر علامت دو عدد یکسان باشد، دو مقدار آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و علامت مشترک را در نظر می‌گیریم.

در صورتی که علامت دو عدد مختلف باشد، مقدار کوچکتر را از مقدار بزرگ‌تر تفریق می‌کنیم و علامت عدد بزرگتر را برای نتیجه اختیار می‌کنیم.

```
  13          00001101
+ -9   =>   - 10001001
-----       ----------
   4          00000100
```

```
  -13         10001101
+  -9  =>   + 10001001
------      ----------
  -22         10010110
```

جمع حسابی در اعداد با علامت

برای جمع اعداد در سیستم مکمل – علامت، نیازی به مقایسه یا تفریق نیست بلکه فقط جمع کافی است.

برای جمع دو عدد باینری با علامت که اعداد منفی با مکمل ۲ نشان داده شده‌اند باید دو عدد شامل بیت علامتشان را با هم جمع نمود و بیت نقلی خارج شده از بیت علامت را صرفنظر کرد.

$$\begin{array}{r} -6 \\ +\ 13 \\ \hline 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \overbrace{00000110}^{6} \\ \underbrace{00001101}_{13} \end{array} \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} \begin{array}{r} 11111010 \\ +\ 00001101 \\ \hline \cancel{1}00000111 \end{array} \Rightarrow 00000111$$

جمع حسابی در اعداد با علامت

برای جمع اعداد در سیستم مکمل – علامت، نیازی به مقایسه یا تفریق نیست بلکه فقط جمع کافی است.

برای جمع دو عدد باینری با علامت که اعداد منفی با مکمل ۲ نشان داده شده‌اند باید دو عدد شامل بیت علامتشان را با هم جمع نمود و بیت نقلی خارج شده از بیت علامت را صرفنظر کرد.

$$\begin{array}{r} -6 \\ +\ -19 \\ \hline -25 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 00000110 \\ \underbrace{00010011}_{19} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} \\ \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} \end{array} \begin{array}{r} 11111010 \\ +\ 11101101 \\ \hline \cancel{1}11100111 \end{array} \Rightarrow \overbrace{1110011}^{\text{عدد منفی}} \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} 00011001$$

تفریق حسابی در اعداد با علامت

برای تفریق حسابی در سیستم مکمل ۲، مکمل ۲ مفروق (شامل بیت علامت) را به مفروق‌منه (شامل بیت علامت) اضافه و بیت نقلی خارج شده از بیت علامت را صرفنظر می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} -6 \\ -\;\;-19 \\ \hline 13 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 00000110 \\ \underbrace{00010011}_{19} \end{array} \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} \begin{array}{r} 11111010 \\ +\;\;00010011 \\ \hline \cancel{1}00001101 \end{array} \Rightarrow 0001101$$

خطای سرریز (Over flow)

– در جمع اعداد بدون علامت، رخداد سرریز همان رقم نقلی است.

– در جمع و تفریق اعداد علامت دار، سرریز در دو هنگام ممکن است رخ دهد: جمع دو عدد مثبت یا جمع دو عدد منفی.

تشخیص رخداد سرریز:

راه اول: اگر حاصلجمع دو عدد مثبت عددی منفی شود و یا جمع دو عدد منفی، عددی مثبت،

راه دوم: در صورتی که دو رقم نقلی آخر مساوی نباشند.

$$\begin{array}{cccccc} & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \quad c_0 \\ & & a = a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \quad a_0 \\ + & & b = b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \quad b_0 \\ \hline & & S_{n-1} & S_{n-2} & \cdots & S_1 \quad S_0 \end{array}$$

$$(1)\ \ if\ a_{n-1} = b_{n-1} \neq S_{n-1} \quad Then \quad V = 1$$

$$\Rightarrow V = a_{n-1} b_{n-1} \bar{S}_{n-1} + \bar{a}_{n-1} \bar{b}_{n-1} S_{n-1}$$

$$(2)\ \ if\ c_n \neq c_{n-1} \quad Then \quad V = 1 \quad \Rightarrow V = c_n \oplus c_{n-1}$$

خطای سرریز (Over flow)

مثال:

$$\begin{array}{r} -7 \\ +\ -6 \\ \hline -13 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 0111 \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} \\ 0110 \xrightarrow{\text{مکمل ۲}} \end{array} \begin{array}{r} 1001 \\ +\ 1010 \\ \hline \underbrace{0011}_{+3} \end{array} \Rightarrow V = 1$$

$$\begin{array}{r} +6 \\ +\ +5 \\ \hline +11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 0110 \\ +\ 0101 \\ \hline \underbrace{1011}_{-5} \end{array} \Rightarrow V = 1$$

تقسیم اعداد باینری

$$\begin{array}{l|l} 1110111 & 1001 \\ \cline{2-2} -\ 1001 & 1101 \\ \hline 0101 & \\ -\ \ 1001 & \\ \hline \ \ 0010 & \\ -\ \ \ \ 1001 & \\ \hline \ \ \ \ 0010 & \end{array}$$

0010 = باقیمانده

$$\begin{array}{l|l} 1111111 & 101 \\ \cline{2-2} -\ 101 & 11001 \\ \hline 010 & \\ -\ \ 101 & \\ \hline \ \ 000 & \\ -\ \ \ \ 101 & \\ \hline \ \ \ \ 0010 & \end{array}$$

0010 = باقیمانده

تقسیم اعداد باینری اعشاری

در تقسیم اعشاری باینری همانند معادل دهدهی عمل می‌کنیم. در تقسیم اعشاری علاوه بر اینکه عدد باید همانند اعداد اعشاری تقسیم شود در نهایت به تعداد عددی که به سمت چپ شیفت می‌دهیم تا باعث از بین رفتن اعشار در مقسوم علیه شویم به همان تعداد باقیمانده عدد را به همین تعداد به سمت راست شیفت می‌دهیم (مثلاً اگر مقسوم علیه را ۴ بار شیفت دادیم باقیمانده عدد را به همین تعداد یعنی چهار مرتبه به سمت راست شیفت می‌دهیم) ولی خارج قسمت همان خواهد بود.

تقسیم اعداد باینری اعشاری

مثال:

1101110111.101 / 111.01 = ?

با ۲ بار شیفت
مقسوم‌علیه به چپ

```
  110111011110.1 | 11101
- 011101         |--------
  ------         | 1111010
   11010
 - 011101
   ------
    10111
  - 011101
    ------
     10010
   - 011101
     ------
      01000
    -  011101
       ------
       000110
```

خارج قسمت = 1111010

باقی‌مانده = 1100.1

این باقی‌مانده، اصلی جواب نیست و برای به‌دست آوردن آن،
این باقیمانده را ۲ بار به سمت راست شیفت می‌دهیم

باقی‌مانده = 11.001

تقسیم اعداد باینری اعشاری

تمرین:

11111.1010 / 1001.11 = ?

*** پاسخ:**

خارج قسمت = 1100

باقی‌مانده اصلی جواب = 10.0010

کدهای باینری

با توجه به این که اعدادی که بین قسمت‌های مختلف کامپیوتر رد و بدل می‌شوند مجموعه‌ای از صفر و یک هستند و دستگاه ورودی مجبور است اعداد گرفته شده دهدهی را به مجموعه‌ای از صفرو یک تبدیل نماید که برای کامپیوتر و مدارات دیجیتال قابل فهم باشند لذا از کدهای باینری استفاده می شود

کدهای دهدهی

برای کد کردن رقم‌های دهدهی حداقل به چهار بیت نیاز می‌باشد. انواع مختلف این کدها در زیر نمایش داده شده‌اند:

Decimal	BCD 8 4 2 1	افزونی – ۳ Excess-3	8 4 -2 -1	2 4 2 1	Biquinary 504310
0	0000	0011	0000	0000	0100001
1	0001	0100	0111	0001	0100010
2	0010	0101	0110	0010	0100100
3	0011	0110	0101	0011	0101000
4	0100	0111	0100	0100	0110000
5	0101	1000	1011	1011	1000001
6	0110	1001	1010	1100	1000010
7	0111	1010	1001	1101	1000100
8	1000	1011	1000	1110	1001000
9	1001	1100	1111	1111	1010000

کدهای دهدهی

کد BCD

کد BCD کدی است که در آن مستقیماً از معادل باینری اعداد استفاده می شود. اصولاً به بیت‌های هر کد متناسب با مکانشان می توان وزن یا ارزشی نسبت داد. وزن بیت ها در کد BCD به ترتیب 1، 2، 4 و 8 است

$$0110 \quad \rightarrow 0\times 8+1\times 4+1\times 2+0\times 1=6$$

$$10 \xrightarrow{Binary} 1010 \qquad 39 \xrightarrow{Binary} 100111 \qquad 395 \xrightarrow{Binary} 110001011$$

$$10 \xrightarrow{BCD} 00010000 \qquad 39 \xrightarrow{BCD} 00111001 \qquad 395 \xrightarrow{BCD} 001110010101$$

کدهای دهدهی

کد 1- 2- 4 8

می‌توان به کدهای دهدهی وزن‌های منفی نیز اختصاص داد:

$$0110 \quad \rightarrow 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times -2 + 0 \times -1 = 2$$

کد افزونی – ۳

کد دهدهی افزونی ۳ که در بعضی کامپیوترهای قدیمی به کار برده شده است، بدون وزن می باشد ولی با اضافه کردن عدد ۳ به مقدار نظیر کد BCD آن حاصل می‌شود

کد Biquinary
(5 0 4 3 2 1 0)

$$1001000 \quad \rightarrow 1 \times 5 + 1 \times 3 = 8$$

کدهای دهدهی

اعداد در کامپیوترهای دیجیتال به‌وسیله کدهای باینری یا به صورت اعداد دهدهی کدشده به شکل کد باینری نمایش داده می‌شود ولی کاربر میل دارد داده‌ها را به شکل اعداد دهدهی به کامپیوتر بدهد. موقعی که عملیات ریاضی بر روی اعداد دهدهی انجام می‌شود، برای سادگی و حداقل سخت‌افزار، اعداد مذکور ابتدا به معادل کدهای باینری تبدیل و سپس عملیات بر روی آنها انجام می‌گیرد البته می توان عملیات ریاضی را مستقیماً در سیستم دهدهی نیز انجام داد.

به عنوان مثال عدد دهدهی ۳۹۵ موقعی که تبدیل به کد باینری شود شامل ۹ بیت می‌شود ولی همان عدد هنگامی‌که به شکل کد BCD نمایش داده شود هر رقم آن با چهار بیت نمایش داده می‌شود لذا عدد مذکور دارای ۱۲ بیت می‌باشد.

کدهای دهدهی

بین کدهای بیان شده به نظر می‌رسد کد BCD طبیعی‌ترین و پرکاربردترین کد می باشد

کدهای چهاربیتی جدول بیان شده دارای یک ویژگی مشترک هستند که در کد BCD وجود ندارد

این کدها همگی خود مکمل هستند یعنی با تبدیل صفرها به یک و یک‌ها به صفر، هر رقم به مکمل ۹ آن تبدیل می شود. این خاصیت عمل تفریق اعداد دهدهی به وسیله مکمل ۹ آن بسیار مفید می‌باشد.

$$395 \xrightarrow{8\,4\,2\,1} 0011\ 1111\ 1011 \xrightarrow[1\to 0]{0\to 1} 1100\ 0000\ 0100 = 604$$

$$393 \xrightarrow{Excess-} 0110\ 1100\ 0110 \xrightarrow[1\to 0]{0\to 1} 1001\ 0011\ 1001 = 606$$

کدهای دهدهی

کد biquinary مثالی از کد ۷ بیتی است که خاصیت آشکارسازی خطا را دارد. در این کد هر رقم دهدهی با ۵ صفر و ۲ یک در ستون نظیر وزن‌های کد نمایش داده می شود.

در این کد اگر در زمان انتقال اطلاعات خطایی پیش آید و یک یا چند بیت عوض شوند در این صورت مداری که در گیرنده وجود دارد می تواند تشخیص دهد که آیا تعداد یک ها دو است یا نه و همچنین اگر ترکیب بیت‌های دریافت شده با ترکیب مجاز کدها مطابقت نداشته باشد خطا تشخیص داده می‌شود.

کدهای تشخیص خطا

هدف این کدها این است که تغییر بیت یا خطای احتمالی ایجاد شده در اطلاعات باینری را در هنگام انتقال تشخیص دهد.

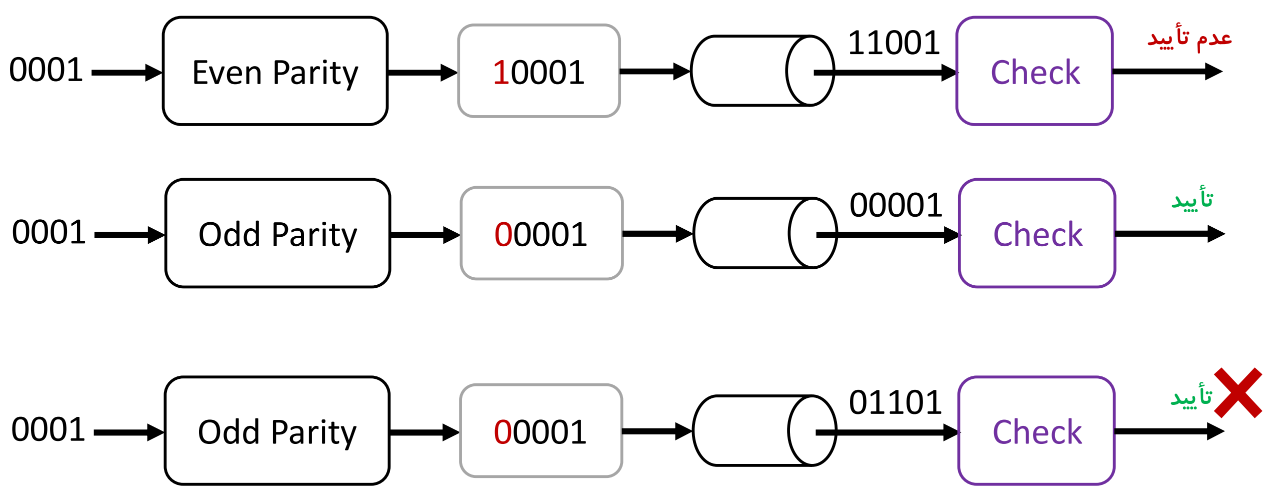
کد توازن ساده

یکی از معمول ترین راه ها برای این منظور استفاده از بیت توازن (Parity Bit) می‌باشد بیت توازن بیتی است اضافی و طوری به پیام اضافه می‌شود که تعداد کل یک‌های انتقالی فرد یا زوج گردد.

- ✓ بیت توازن فرد (Odd Parity): بیتی است اضافی که جزئی از پیام بوده وسبب می‌شود که تعداد کل یک‌ها در پیام فرد باشد.
- ✓ بیت توازن زوج (Even Parity): بیتی است اضافی که جزئی از پیام بوده وسبب می‌شود که تعداد کل یک‌ها در پیام زوج باشد.

کدهای تشخیص خطا

کد توازن ساده



کدهای تشخیص خطا

کد گری (Gray Code)

خاصیت کد گری این است که در هنگام انتقال اطلاعات فقط یک تغییر بین دو عدد رخ می‌دهد.

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

** روش تبدیل اعداد دهدهی به کد گری:

الف ـ معادل باینری عدد را می نویسیم.

ب ـ صفر را به ابتدای عدد باینری (سمت چپ عدد) اضافه می‌کنیم.

پ ـ بیت *i* اُم کد گری نتیجه XOR کردن بیت *i* اُم و *i*+1 اُم از عدد باینری است.

$(8)_{10} = (\quad ? \quad)_{Gray}$

$(8)_{10} \rightsquigarrow (1000)_2 \rightsquigarrow (0\,1\,0\,0\,0)_2 \rightsquigarrow (1100)_{Gray}$

کدهای تشخیص خطا

کد گری (Gray Code)

خاصیت کد گری این است که در هنگام انتقال اطلاعات فقط یک تغییر بین دو عدد رخ می‌دهد.

Decimal	Binary	Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100

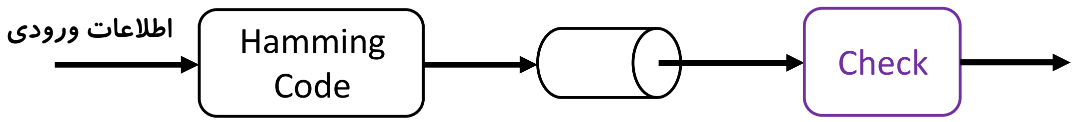
Decimal	Binary	Gray
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

کدهای تشخیص خطا

کد همینگ (Hamming Code)

یک عدد تصحیح و تشخیص خطا می باشد. در این کد k بیت توازن به n بیت کلمه داده اضافه می شود. آن مکان‌هایی که توان‌هایی از ۲ می‌باشند برای توازن رزرو شده اند.

$P_1P_2 - P_4 --- P_8 ------- P_{16}$



کدهای تشخیص خطا

کد همینگ (Hamming Code)

اطلاعات ورودی : 10110001 $\xrightarrow{\text{۴ بیت کد}}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_1	P_2	1	P_4	0	1	1	P_8	0	0	0	1

$P_1 = XOR\ of\ bits\ (3,5,7,9,11) = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

$P_2 = XOR\ of\ bits\ (3,6,7,10,11) = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$

$P_4 = XOR\ of\ bits\ (5,6,7,12) = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

$P_8 = XOR\ of\ bits\ (9,10,11,12) = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

011101110001

کدهای تشخیص خطا

کد همینگ (Hamming Code)

در کد به‌دست آمده باید ۴ بیت چک شود:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= XOR\ of\ bits\ (1,3,5,7,9,11) \\ C_2 &= XOR\ of\ bits\ (2,3,6,7,10,11) \\ C_4 &= XOR\ of\ bits\ (4,5,6,7,12) \\ C_8 &= XOR\ of\ bits\ (8,9,10,11,12) \end{aligned}\right\} C = C_8C_4C_2C_1 \begin{cases} \text{صفر} \rightarrow C = 0000 \Rightarrow \text{خطا نداریم} \\ \text{غیر صفر} \Rightarrow \end{cases}$$

معادل دهدهی عدد به‌دست آمده، محل خطاست

کدهای تشخیص خطا

کد همینگ (Hamming Code)

011101110001

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= XOR\ of\ bits\ (1,3,5,7,9,11) = XOR(0,1,0,1,0,0) = 0 \\ C_2 &= XOR\ of\ bits\ (2,3,6,7,10,11) = XOR(1,1,1,1,0,0) = 0 \\ C_4 &= XOR\ of\ bits\ (4,5,6,7,12) = XOR(1,0,1,1,1) = 0 \\ C_8 &= XOR\ of\ bits\ (8,9,10,11,12) = XOR(1,0,0,0,1) = 0 \end{aligned}\right\} C = 0000 \Downarrow \text{خطا نداریم}$$

011101110011

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= XOR\ of\ bits\ (1,3,5,7,9,11) = 1 \\ C_2 &= XOR\ of\ bits\ (2,3,6,7,10,11) = 1 \\ C_4 &= XOR\ of\ bits\ (4,5,6,7,12) = 0 \\ C_8 &= XOR\ of\ bits\ (8,9,10,11,12) = 1 \end{aligned}\right\} C = 1011 \Rightarrow \text{بیت شماره ۱۱ محل خطا است}$$

If
Plan "A"
Doesn't work,
the alphabet has 25
more letters …
204 if you're in Japan.

__ Claire Cook

پایان فصل اول

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت
آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir