به نام خدا

سرای دانشجو

دانلود برترین جزوات و فیلم های دانشجویی

بامادرارتباط باشید

Website:	www.sarayedaneshjo.com
Email:	info.sarayedaneshjo@gmail.com

دانش اگر در ثریا هم باشد مردانی از سرزمین پارس بدان دست خواهند یافت. رسول اکرم (ص)

www.elec.ir

فصل اول

معرفي سيگنال‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۱-۱- تعريف سيگنال

سيگنال تابعي است كه حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فيزيكي يك سيستم است.

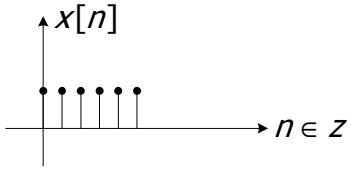
x[n] سيگنال زمان گسسته x(t) سيگنال زمان پيوسته

t ,n متغيرهاي مستقل و x متغير وابسته يا تابع مي‌باشد.

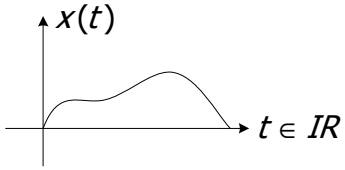
سيستم : مجموعه‌اي از اجزاي گرد آمده در كنار هم.

۱-۲- طبقه‌بندي سيگنال‌ها

۱-۲-۱- سيگنال‌هاي زمان گسسته



۱-۲-۲- سيگنال‌هاي زمان پيوسته



بديهي است كه با نمونه‌برداري از سيگنال زمان پيوسته مي‌توان سيگنال زمان گسسته را بدست آورد.

۱-۳- سيگنال‌هاي زوج و سيگنال‌هاي فرد

$x(t) = x(-t)$ Even , يا زوج $x[n] = x[-n]$

$x(t) = -x(-t)$ Odd, يا فرد $x[n] = -x[-n]$

تذكر ۱: سيگنال فرد گسسته بالاجبار در مبدا مختصات مقدار صفر دارد.

تذكر ۲: هر سيگنال دلخواه را مي‌توان به صورت مجموع دو سيگنال زوج و فرد نوشت:

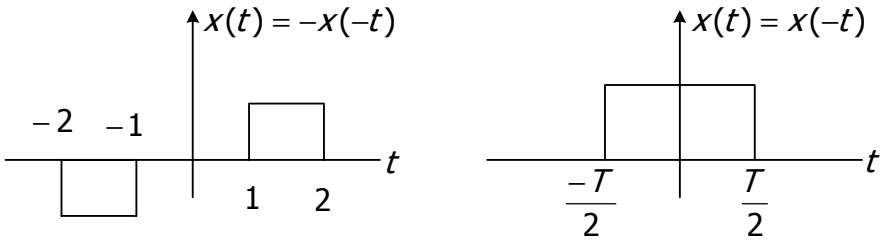
$$x(t) = Even(x(t)) + Odd(x(t))$$

$$Even(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$Odd(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۱)



۱-۴- سيگنال متناوب

سيگنال متناوب به سيگنالي گفته مي‌شود كه در بازه‌هاي زماني مشخص عينا تكرار شده باشد.

$$x(t) = x(t+T) = x(t+kT) \qquad \omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad k \in Z$$

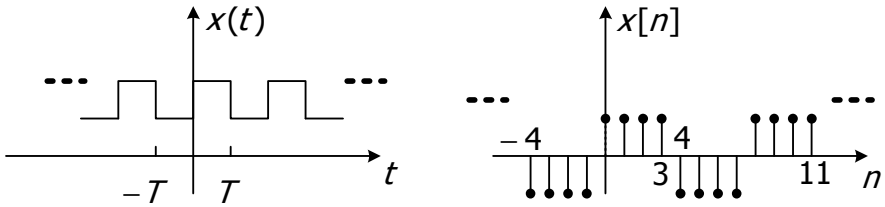
$$x[n] = x[n+N] = x[n+kN] \qquad \Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \qquad k \in Z$$

تذكر ۱: بديهي است كه اگر T , N دوره تناوب باشند ۲ برابر و ۳ برابر و ... آن هم دوره تناوب است.

تذكر۲: كوچكترين دوره تناوب دوره تناوب اصلي است (T در پيوسته، N در گسسته) و فركانس تعريف شده با كوچكترين دوره تناوب، فركانس اصلي است. (ω_0 در پيوسته، Ω_0 در گسسته)

تذكر۳: دوره تناوب سيگنال زمان پيوسته (T) بايد عدد مثبت باشد، درحاليكه دوره تناوب سيگنال زمان گسسته (N) علاوه بر مثبت بودن بايستي صحيح نيز باشد.

مثال ۲)



دوره تناوب اصلي $2T$ دوره تناوب اصلي $N = 8$

۱-۵- سيگنال‌هاي انرژي و توان

انرژي

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt \qquad E = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$P_{av} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt \qquad P_{av} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

توان متوسط

يك سيگنال به عنوان سيگنال انرژي شناخته مي‌شود اگر و تنها اگر محدود باشد.

۱-۶- عمليات روي متغير وابسته

(1) $y(t) = Ax(t) \qquad y[n] = Ax[n]$

(2) $y(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

(3) $y(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n]\cdot x_2[n]$

(4) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \qquad y[n] = x[n] - x[n-1]$

(5) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,d\lambda \qquad y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

۱-۷- عمليات روي متغير مستقل

۱-۷-۱- شيفت زماني

$$y(t) = x(t - t_0) \qquad y[n] = x[n - n_0]$$

شيفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

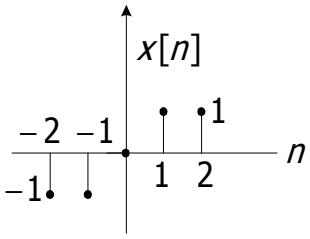
شيفت به چپ: اگر $t_0 < 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت چپ شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

تذكر ۱: چنانچه $t_0 > 0$ باشد، سيگنال $x(t - t_0)$ از x(t) عقب‌تر است (به لحاظ زماني) و چنانچه $t_0 < 0$ باشد، سيگنال $x(t - t_0)$ از x(t) جلوتر است.

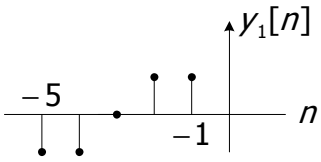
تذكر ۲: در مورد سيگنال‌هاي زمان گسسته نيز بسته به اينكه n_0 مثبت و يا منفي باشد سيگنال x[n] را به راست و يا چپ به اندازه n_0 واحد شيفت مي‌دهيم تا y[n] بدست آيد.

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

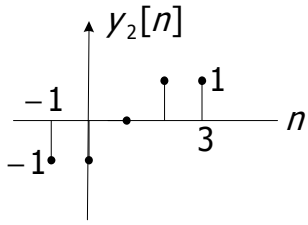
مثال ۳)



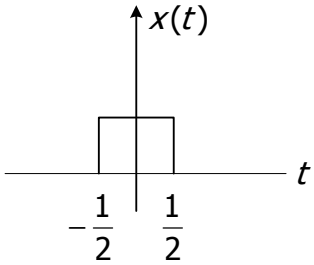
$y_1[n] = x[n+3]$



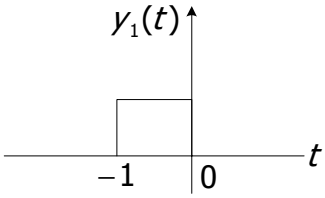
$y_2[n] = x[n-1]$



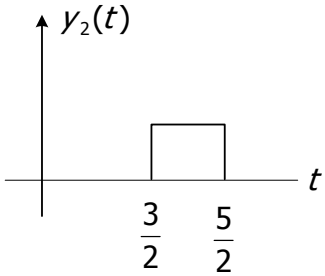
مثال ۴)



$y_1(t) = x(t+\frac{1}{2})$



$y_2(t) = x(t-2)$



در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي‌توان سيگنالي را به صورت زوج يا فرد درآورد.

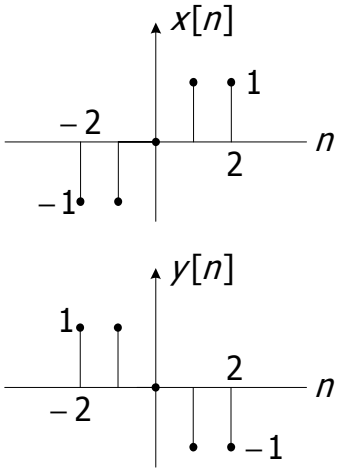
۱-۷-۲- وارون‌سازي زماني

$$y(t) = x(-t) \qquad y[n] = x[-n] \tag{2}$$

x(-t) يا x[-n] انعكاس x(t) و يا x[n] نسبت به محور قائم هستند.

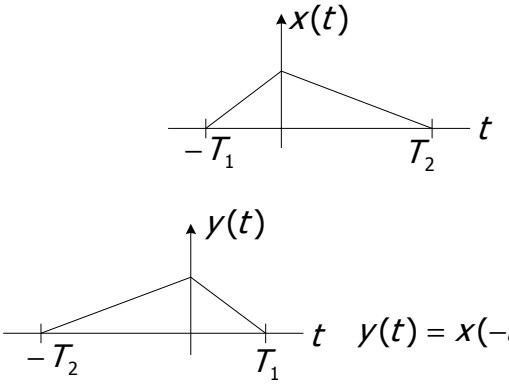
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۵)



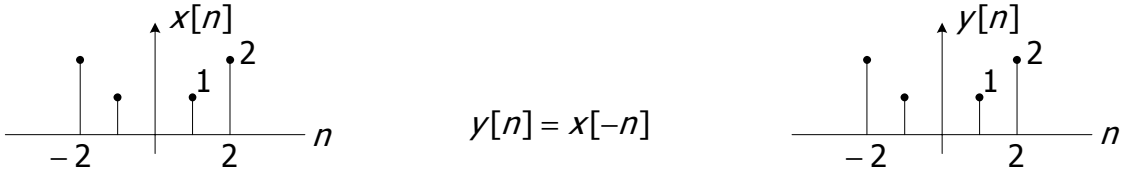
$y[n] = x[-n]$

مثال ۶)



$y(t) = x(-t)$

مثال ۷)



$y[n] = x[-n]$

براي سيگنالي كه نه زوج و نه فرد است وارون زماني آن نه فرد و نه زوج است. اما براي سيگنال زوج وارون زماني زوج است ولي براي سيگنال فرد با توجه به خاصيت x[n]= -x[-n] وارون زماني آن -x[n] است.

۱-۷-۳- تغيير مقياس زماني

$$y[n] = x[\frac{1}{k}n] \quad ; k \in Z \quad \text{يا} \quad y[n] = x[kn] \qquad y(t) = x(at) \quad ; a \in IR \qquad (3)$$

الف) اگر |a|>1 باشد y(t) فشرده شده سيگنال x(t) خواهد بود.

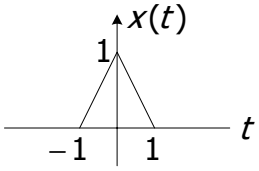
ب) اگر |a|<1 باشد y(t) باز شده سيگنال x(t) خواهد بود.

ج) اگر $a < 0$ باشد بايد بعد از تغيير مقياس ، وارون زماني انجام داد.

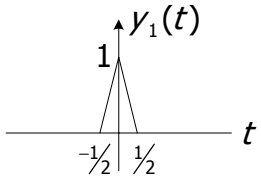
تذكر: در زمان پيوسته ماهيت سيگنال عوض نمي‌شود، اما در زمان گسسته ماهيت سيگنال تغيير مي‌كند و سيگنال جديدي بدست مي‌آيد.

مثال ۸)

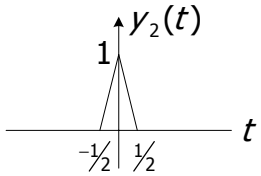
سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



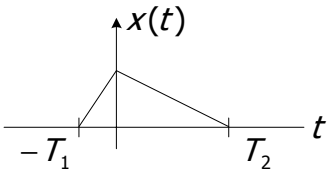
$y_1(t) = x(2t)$



$y_2(t) = x(-2t)$

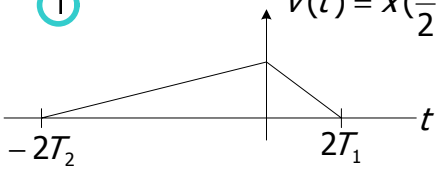


مثال ۹)



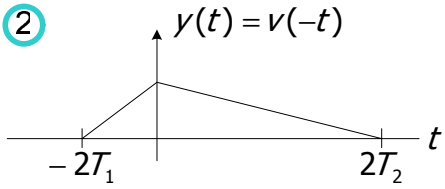
$y(t) = x(-\frac{1}{2}t)$

1 $v(t) = x(\frac{1}{2}t)$

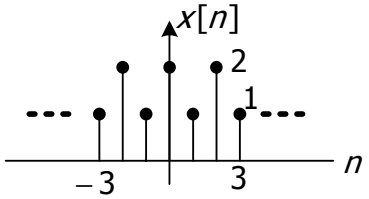


وارون زماني

2 $y(t) = v(-t)$



مثال ۱۰) $N = 2$, $y_1[n] = x[2n]$



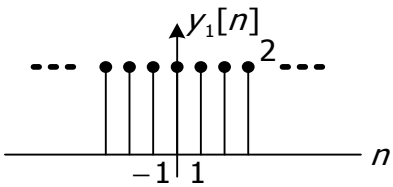
براي حل اينگونه مسائل به روش زير عمل مي‌كنيم:

با جايگذاري n در فرمول y[n] مقادير بدست آمده برحسب x[n] مي‌باشند.

$\vdots$

$y[-1] = x[-2] = 2$

$y[0] = x[0] =$



$y[1] = x[2] = 2$

$y[2] = x[4]$

$\vdots$

دوره تناوب سيگنال جديد $x[2n]$ برابر $N = 1$ است.

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

تذکر: y[n]= x[kn] نسبت به x[n] فشرده شده، که برخي از مقادير را از دست مي‌دهد.

مثال ۱۱)

$$y_2[n] = x[\tfrac{1}{2}n]$$

$$\vdots$$

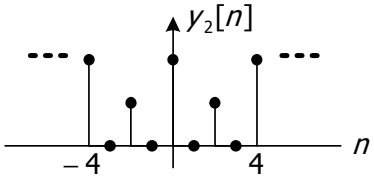
$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = x[0] = 2$$

$$y[1] = x[\frac{1}{2}] = 0$$

$$y[2] = x[1] = 1$$

$$\vdots$$



دوره تناوب سیگنال جدید برابر $N = 4$ است.

تذکر: $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به x[n] باز شده که در نتیجه تعدادي صفر به y[n] اضافه خواهد شد. بدین ترتیب ماهیت سیگنال گسسته در اثر تغییر مقیاس زماني تغییر مي‌کند.

تذکر: اگر سیگنال زمان پیوسته و یا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغییر مقیاس زماني در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سیگنال جدید کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سیگنال جدید افزایش مي‌یابد.

۱-۷-۴- رسم سیگنال به روش منظم

4)

$$y(t) = x(at - b)$$

$$x(t) \to v(t) = x(t - b)$$

$$\mathbf{v(t) \to y(t) = v(at) = x(at - b)}$$

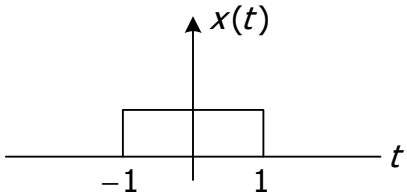
4)

$$y[n] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$

$$x[n] \to v[n] = x[n - n_0]$$

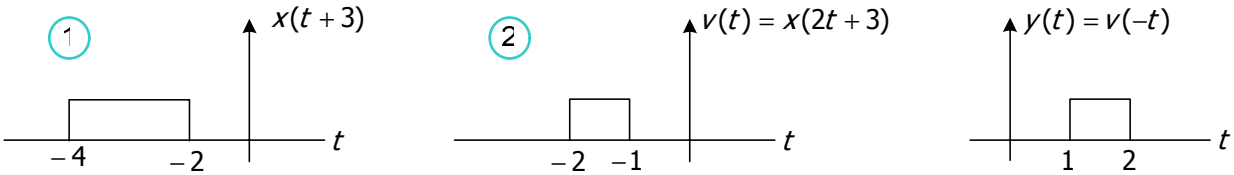
$$v[n] \to y[n] = v[kn] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$

مثال ۱۲)

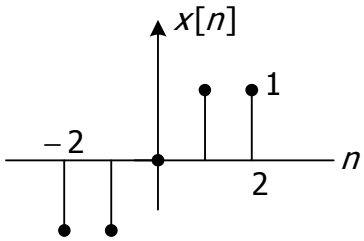


$$y(t) = x(-2t + 3) = ?$$

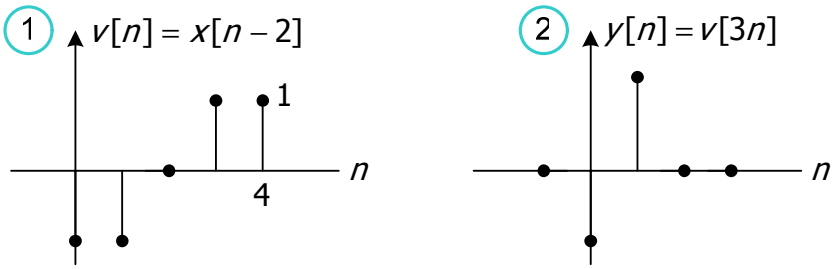
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



مثال ۱۳)

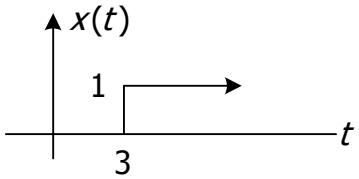


$y[n]=x[3n-2]=?$

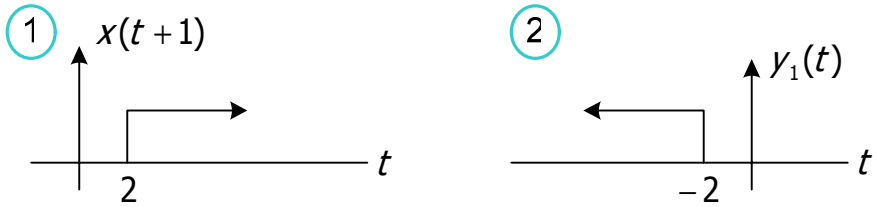


مثال ۱۴)

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<3\\ 1 & t\geq 3\end{cases}$$



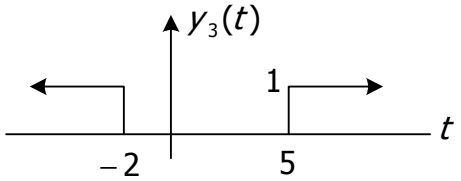
الف) $y_1(t)=x(1-t)$

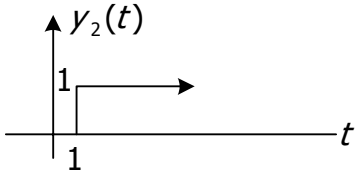


ب) $y_2(t)=x(3t)$

ج) $y_3(t)=x(1-t)+x(t-2)$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



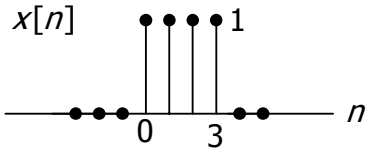


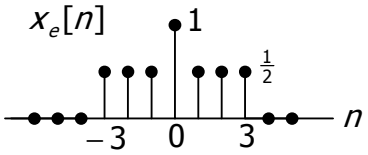
مثال ۱۵) مطلوب است قسمت زوج و فرد سیگنال زیر؟

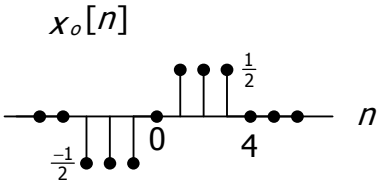
$$x[n]=\begin{cases}1 & n=0,1,2,3\\ 0 & o.w\end{cases}$$

میدانیم

$$\begin{cases}x_e=\frac{1}{2}(x[n]+x[-n])\\ x_o=\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])\end{cases}$$







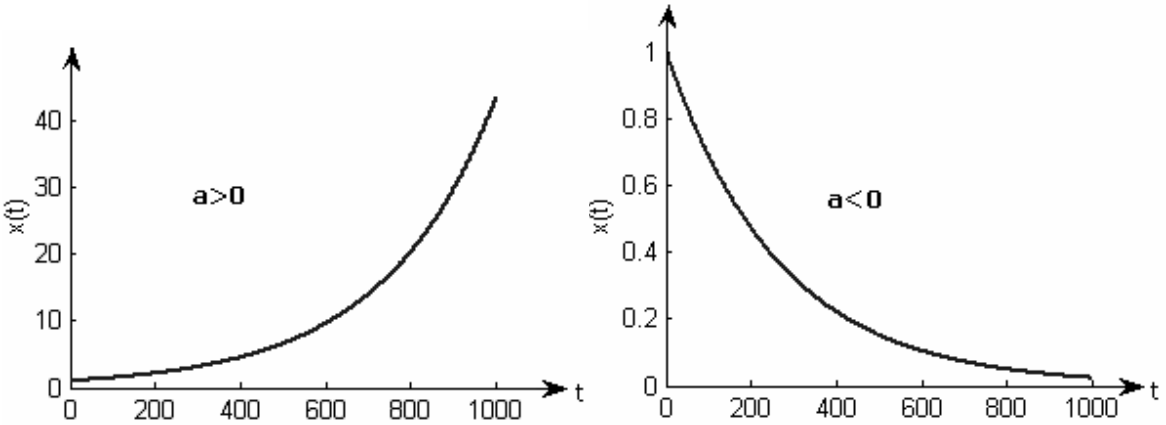
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۱-۸- معرفي سيگنال‌هاي مهم

دراين قسمت چند سيگنال اساسي زمان پيوسته و زمان گسسته را معرفي مي‌كنيم. اين سيگنال‌ها نه تنها به دفعات پيش مي‌آيند بلكه توسط آنها مي‌توان سيگنال‌هاي پيچيده‌اي را فرموله و توليد كرد. مهم‌ترين كاربرد آنها در آزمايشگاه مشخص مي‌شود.

۱-۸-۱- سيگنال نمايي

زمان پيوسته $x(t) = Be^{at}$



الف) نمايي كاهشي

ب) نمايي افزايشي

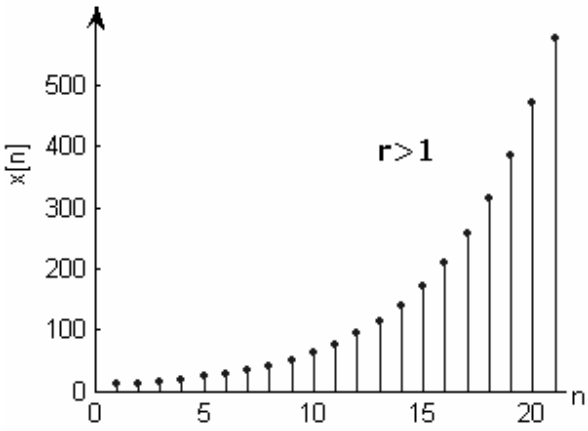
با فرض اينكه $a, B \in IR$ باشند، با توجه به مثبت و يا منفي بودن a سيگنال نمايي به يكي از دو فرم افزايشي و يا كاهشي خواهد بود.

تذكر: چنانچه دامنه سيگنال خروجي سيستمي با افزايش زمان به طور نامحدود زياد شود، سيستم تحت بررسي به عنوان سيستم ناپايدار شناخته مي‌شود.

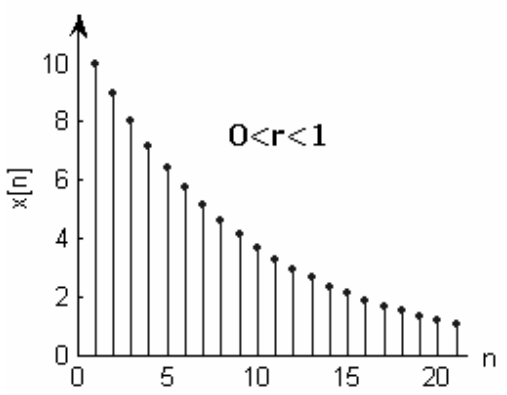
سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

سگنال زمان گسسته $x[n] = B(r^n)$

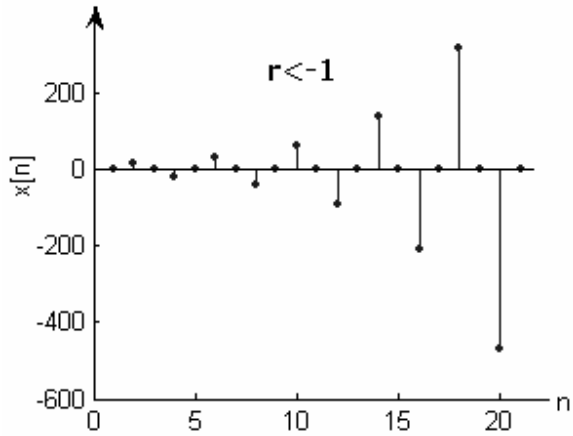
سيگنال زمان گسسته نمايي بسته به مقادير مختلف r چهار حالت مي‌تواند داشته باشد.



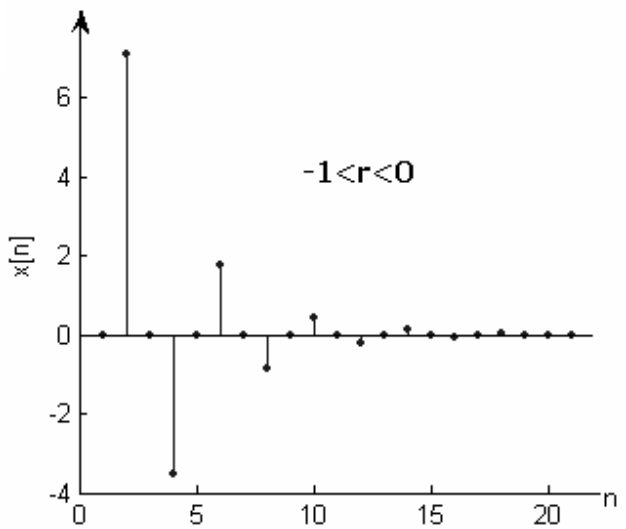
الف) نمايي افزايشي



ب) نمايي كاهشي



ج) نوساني افزايشي



د) نوساني كاهشي

۱-۸-۲- سيگنال سينوسي

زمان پيوسته $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ و $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

تذكر: سيگنال سينوسي همواره متناوب و با دوره تناوب T است.

مثال ۱)

الف) $x(t) = \cos(\frac{1}{6}t)$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

ب) $x(t)=\cos(\frac{8\pi}{31}t)$

$$\rightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}}=\frac{31}{4}$$

سیگنال زمان گسسته $x[n]=A\cos(\Omega n+\varphi)$ و $\Omega=2\pi f=\frac{2\pi}{N}$

تذکر: سیگنال زمان گسسته سینوسي به شرطي متناوب است که بتوان $N\in Z^{+}$ را بدست آورد به نحوي که $x[n]=x[n+N]$ گردد. (این سیگنال برخلاف سیگنال زمان پیوسته سینوسي بعضا متناوب نیست.)

$$A\cos(\Omega n+\varphi)=A\cos(\Omega n+\Omega N+\varphi)\rightarrow \Omega N=2k\pi \quad , \quad k\in Z\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\Omega}, N\in Z^{+}$$

مثال ۲)

الف)

$$x[n]=\cos[\frac{2\pi}{12}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}}=12k=12$$

, (k=1)

ب)

$$x[n]=\cos[\frac{8\pi}{31}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}}=\frac{31}{4}k=31$$

,(k=4)

ج)

$$x[n]=\cos[\frac{1}{6}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{1}{6}}=12k\pi$$

متناوب نیست

۱-۸-۳- سیگنال نمايي مختلط

زمان پیوسته $x(t)=B\,e^{-j\omega t}$ یا $x(t)=Be^{j\omega t}$

$$x(t)=B\,e^{j\omega t}=B\cos(\omega t)+jB\sin(\omega t) \quad , \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

زمان گسسته $x[n]=B\,e^{-j\Omega n}$ یا $x[n]=Be^{+j\Omega n}$

$$x[n]=B\,e^{j\Omega n}=B\cos(\Omega n)+jB\sin(\Omega n) \quad , \quad N\in Z^{+}, K\in Z \quad N=\frac{2k\pi}{\Omega}$$

تذکر ۱: سیگنال زمان گسسته نمايي مختلط $x[n]=Be^{+j\Omega n}$ مي‌تواند در زمان متناوب با دوره تناوب N باشد.

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

تذکر ۲: سیگنال زمان گسسته نمایي مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ علاوه بر اینکه در زمان نسبت به n مي‌تواند متناوب باشد، در فرکانس نیز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+4\pi)n} = e^{j(\Omega+2m\pi)n} \quad , \quad m \in z$$

تذکر ۳: اگر سیگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امکان باید به حاصل جمع دو سیگنال تبدیل شود و دوره تناوب هر کدام را جداگانه به دست آورد. سپس دوره تناوب مشترك را به دست مي‌آوریم.

مثال ۳)

الف) $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \ldots \quad \Rightarrow T = 2\pi$$

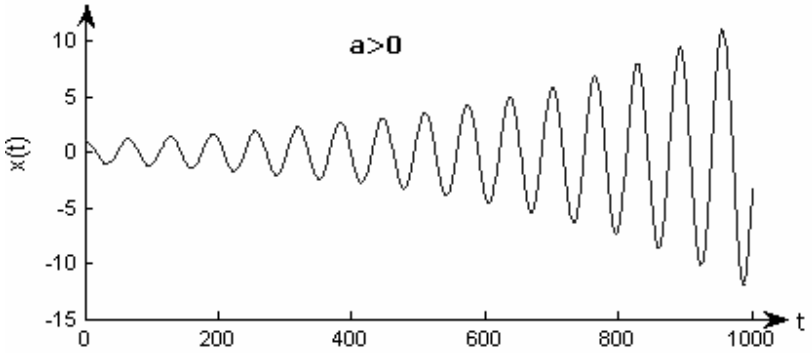
ب) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3k = 3 = 6 = 9 = \ldots = 24 \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8k}{3} = 8 = 16 = 24 = \ldots \quad N = 24$$

۱-۸-٤- سیگنال سینوسي میراشونده

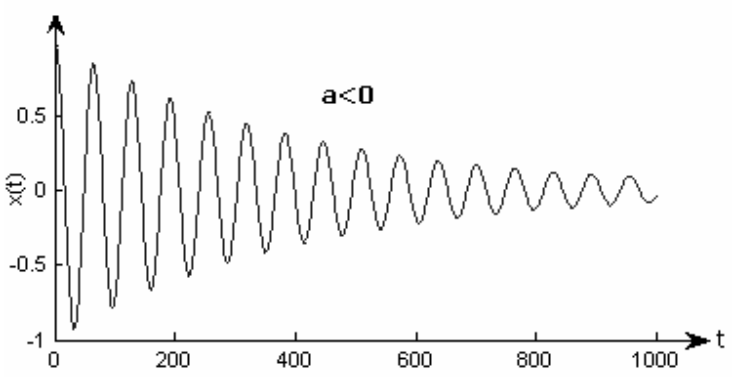
زمان پیوسته $x(t) = Be^{at}\cos(\omega t + \varphi)$

تذکر: سیگنال نمایي متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتي باعث مي‌شود که سیگنال نهایي متناوب نباشد.



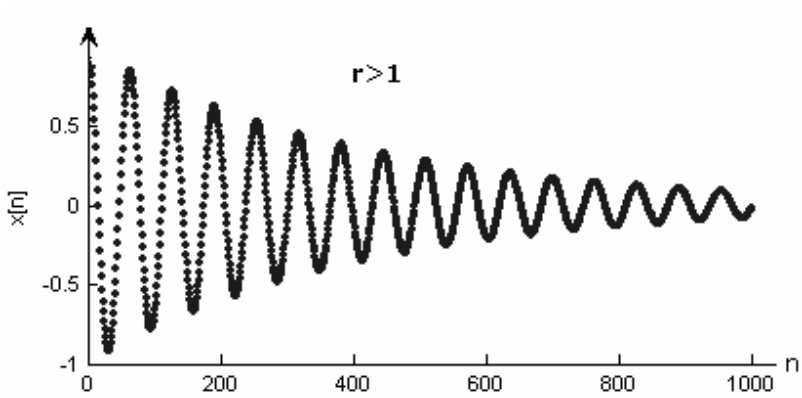
الف) سیگنال سینوسي میراشونده افزایشي

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

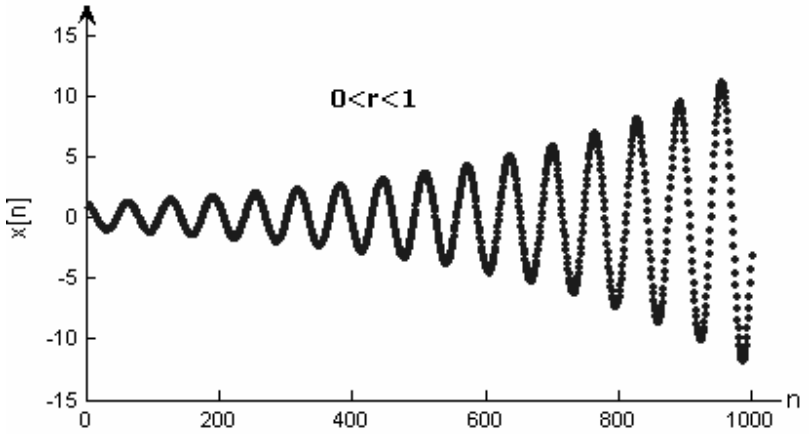


ب) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي

زمان گسسته $x[n] = B(r^n)\cos[\Omega n + \varphi]$



الف) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي



ب) سيگنال سينوسي ميراشونده افزايشي

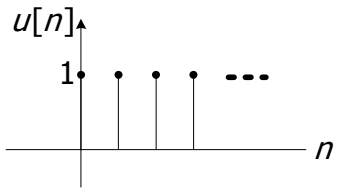
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۱-۹-توابع ویژه

۱-۹-۱-تابع پله واحد

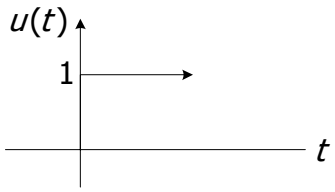
زمان گسسته

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



زمان پیوسته

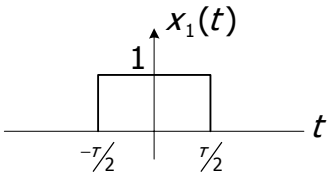
$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



تذکر: توابعي كه فرم هندسي دارند را مي‌توان بر حسب تابع پله بيان كرد:

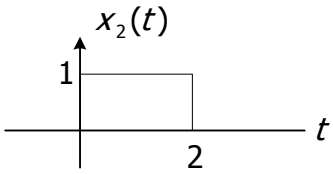
مثال ٤)

الف)



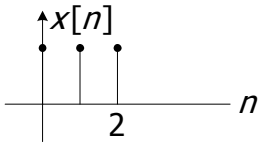
$$x_1(t)=u(t+\tfrac{T}{2})-u(t-\tfrac{T}{2})$$

ب)



$$x_2(t)=u(t)-u(t-2)$$

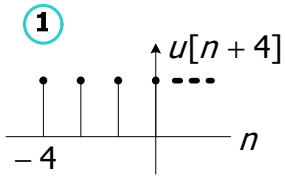
ج)

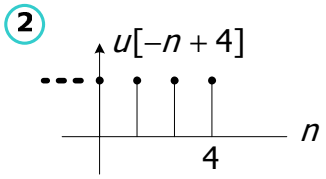


$$x[n]=u[n]-u[n-3]$$

د)

$$u[-n+4]$$

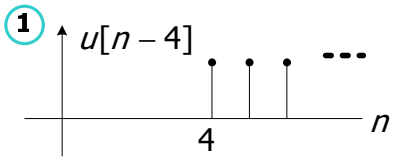


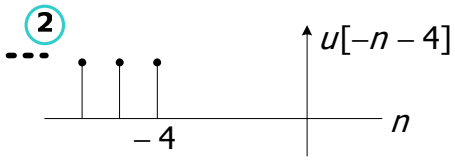


ن)

$$u[-n-4]$$

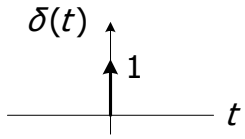
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM





۱-۹-۲-تابع ضربه

زمان پیوسته



$$\delta(t)=\begin{cases}\text{مقدارویژه} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{-1}\delta(t)dt=0$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

$$u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}\delta(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau$$

$$\lambda+t_0=\tau$$

-خواص:

۱) بیان توابع چند ضابطه‌اي با يك ضابطه:

$$y(t)=\begin{cases}x(t) & t\geq 0\\ 0 & o.w\end{cases} \Rightarrow y(t)=x(t)u(t)$$

مثال ۵)

$$y(t)=\begin{cases}x(t) & t\geq 2\\ 0 & o.w\end{cases} \Rightarrow y(t)=x(t)u(t-2)$$

۲) خاصيت غربالي تابع ضربه

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$x(t)\cdot\delta(t)=x(0)\delta(t)$$
$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

۳) انتگرال کانولوشن

$$\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)$$

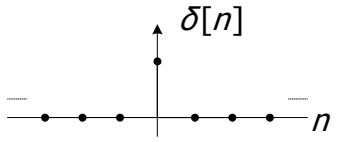
٤) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

٥*)

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

زمان گسسته



$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$u[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\ldots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{m=n}^{-\infty}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

$$u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}\delta[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-n_0-k]$$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad \delta[n]=u[-n]-u[-n-1]$$

تابع ضربه چون تابعي زوج است پس هر دو رابطه بالا قابل قبول است.

- خواص:

۱) بيان توابع چند ضابطه‌اي با يك ضابطه

$$y[n]=\begin{cases}x[n] & n\leq -2\\ 0 & o.w\end{cases}=x[n]u[-n-2]$$

۲) خاصيت غربالي تابع ضربه

---

* این رابطه را اثبات کنید.

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$y[n] = x[n] \cdot \delta[n] = x[0]\delta[n]$$

مثال 6:

$$y[n] = x[n+2]\delta[n-4] = x[6]\delta[n-4]$$

۳)انتگرال کانولوشن

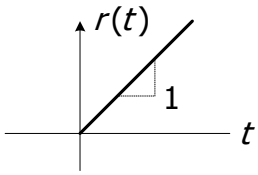
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k] = x[n]$$

4) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta[n] = \delta[-n]$$

۱-۹-۳- تابع شیب

زمان پیوسته

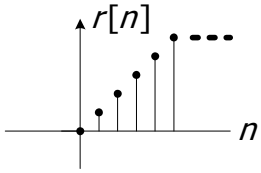


$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \qquad r(t) = t\,u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\,d\lambda$$

زمان گسسته



$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

رابطه بین تابع شیب و پله واحد

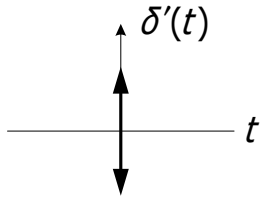
$$u[n] = ? \qquad r[n] = n\,u[n]$$

۱-۹-٤- تابع دوبلت واحد

زمان پیوسته

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



خواص:

خاصيت ۱)

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

اثبات:

$$(x(t)\cdot f(t))' = x'(t)f(t) + x(t)f'(t)$$

$$if\ f(t) = \delta(t)$$

$$\downarrow \qquad = x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) + x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t)$$

$$(x(t)\delta(t))'$$

$$=$$

$$(x(0)\,\delta(t))'$$

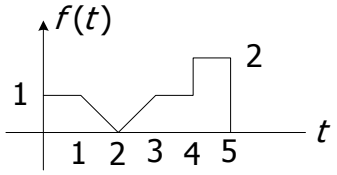
$$=$$

$$x(0)\delta'(t) = x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \Rightarrow x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

خاصيت ۲)

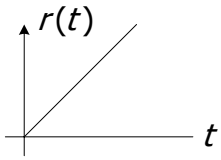
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta'(t-\lambda)d\lambda = x'(t)$$

مثال ۷) مطلوب است بيان f(t) بر حسب توابع ويژه ؟

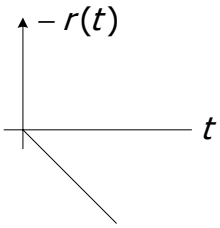


از منتهي اليه سمت چپ شروع به نوشتن مي‌كنيم. هر جا كه شكل تغيير كند يعني تابع عوض شده. اولين كاري كه انجام مي‌دهيم ضريب زاويه كليه خطها را بدست مي‌آوريم :

در فاصله $1 \le t \le 2$ شكل تغيير كرده و داراي شيب به سمت پايين است. در فاصله $2 \le t \le 3$ نيز شكل دوباره تغيير مي‌كند.



$$\begin{matrix}(2,0)\\(3,1)\end{matrix} \Rightarrow m = 1$$



$$\begin{matrix}(1,1)\\(2,0)\end{matrix} \Rightarrow m = -1$$

$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 2u(t-5)$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) _ 2\delta(t-4)$$

مثال ۸) اگر $f(t) = a\,e^{-t}$ هر يك از توابع زير را همراه با مشتق و انتگرالشان رسم كنيد.

الف) $f_1(t) = f(t)\,u(t)$

حل

$$f_1'(t) = f'(t)\,u(t) + f(t)\,u'(t)$$
$$= f'(t)\,u(t) + f(0)\,\delta(t) + -a\,e^{-t}\,u(t) + a\,\delta(t)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} a\,e^{-t}\,dt = -a\,e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = a$$

ب) $f_2(t) = f(t-1)\,u(t-2)$

ج) $f_3(t) = f(t-1)\,u(t-1)$

د) $f_4(t) = f(t-1)\,u(t)$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

سيستم و تعريف آن :

پروسه‌اي كه باعث تغيير و تحول در يك سيگنال مي‌شود .

مجموعه‌اي منظم كه به كمك يكديگر هدف مشخصي را برآورده مي‌سازد.

بيان روابط بين خروجي و ورودي در يك سيستم :

زمان پيوسته

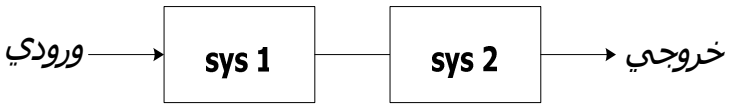
۱) با استفاده از معادلات ديفرانسيل ۲) تابع تبديل

زمان گسسته

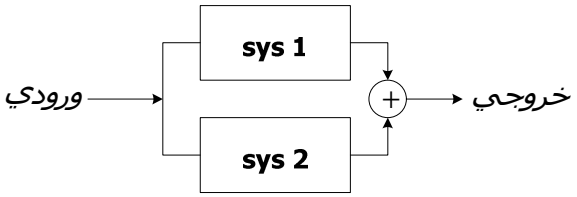
۱) معادلات تفاضلي ۲) تابع تبديل

۱-۱۰- تقسيم‌بندي سيستم‌ها

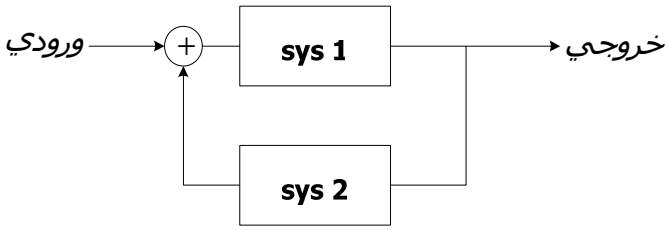
۱-۱۰-۱- اتصال سري:



۱-۱۰-۲- اتصال موازي:



۱-۱۰-۳- اتصال فيدبك:



۱-۱۱- خواص سيستم‌ها

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۱-۱۱-۱- حافظه

سيستم بدون حافظه است اگر خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه بستگي داشته باشد. به عبارت ديگر سيستم با حافظه است اگر خروجي به مقادير گذشته ورودي وابسته باشد.

مثال ۱)

الف) $y[n] = 2x[n] + x^2[n]$ بدون حافظه

ب) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ با حافظه

ج) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ با حافظه

د) $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$ بدون حافظه

ن) $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\lambda)\, d\lambda$ باحافظه

و) $v_L(t) = L\frac{di_l(t)}{dt}$ با حافظه

۱-۱۱-۲- پايداري (BIBO[1])

سيستمي پايدار است كه به ازاي ورودي محدود خروجي محدود بدهد.

$$|x(t)| \le M_x < \infty, \forall t \Rightarrow |y(t)| \le M_y < \infty, \forall t$$

تذكر ۱: اگر سيستمي با ورودي محدود و خروجي نامحدود داشتيم اين سيستم ناپايدار است.

تذكر ۲: اگر سيستمي با ورودي نامحدود و خروجي نامحدود داشتيم هيچ صحبتي نمي‌توان راجع به اين سيستم كرد.

[1] Bounded Input Bounded Output

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۲) $y(t) = t\,x(t)$

$x(t) = u(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$y(t) = t\,u(t) = r(t)$ و $r(t)$ تابعي نامحدود است پس سیستم ناپایدار است.

مثال ۳) $y(t) = e^{x(t)}$

$$|y(t)| = \left|e^{x(t)}\right| = e^{x(t)} \le M_y < \infty$$

چون $e^{x(t)}$ عدد مي‌شود پس باز هم محدود است. بنابراین با توجه به تعریف ریاضي این سیستم پایدار است.

مثال ٤)

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

اگر $x[n]$ در همه لحظات محدود باشد شیفت یافته‌هاي آن هم محدود است پس سیستم پایدار است

مثال ٥)

$$y[n] = r^n\, x[n] \begin{cases} |r| > 1 \Rightarrow |r^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty : x[n] = u[n] \to y[n] \to \infty \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \text{ناپایدار} \\ |r| < 1 \Rightarrow |r^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \text{پایدار} \end{cases}$$

مثال ۶)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \to x[n] = u[n] \to y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = r[n]$$

ناپایدار

۱-۱۱-۳- علیت (causality)

سیستمي علي است که خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه یا لحظات قبل بستگي داشته باشد به عبارتي خروجي سیستم به آینده ورودي بستگي ندارد.

تذکر ۱: سیستم بدون حافظه مطمئنا علي است.

تذکر ۲: براي سیستم علي شرط سکون برقرار است.

شرط سکون:

$$x(t) = 0; \quad t \le t_0 \Rightarrow y(t) = 0; \quad t \le t_0$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$x_1(t) = x_2(t); \quad t \le t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t); \quad t \le t_0$$

مثال ۷)

الف) $y(t) = x(t+1)$ غيرعلي

ب) $v_c(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\,d\tau$ علي

ج)
$$i_c(t) = \frac{dv_c(t)}{dt} \quad ; \quad \frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v_c(t) - v_c(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v_c(t+\Delta t) - v_c(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

با توجه به اين كه براي مشتق دو تعريف وجود دارد چنانچه از دومين تعريف براي تعيين جريان خازن استفاده نمائيم سيستم مذكور غيرعلي خواهد بود.

د) $y(t) = x(t)\cos(t+1)$

خروجي فقط به زمان حال ورودي بستگي دارد و ازطرفي چون سيستم بدون حافظه است پس حتما علي است.

ه) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + x[n-1] + \ldots$ علی

ن) $y[n] = x[-n] \qquad n = -1 \Rightarrow y[-1] = x[1]$ غير علی

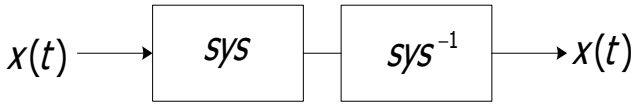
و) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ علی

ی) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$ غير علی

۱-۱۱-٤- معكوس‌پذيري

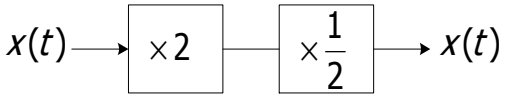
سيستمي معكوس‌پذير است كه به ازاي ورودي‌هاي متمايز همواره خروجي‌هاي متماير داشته باشد.

اگر سيستمي معكوس‌پذير باشد مي‌توان به صورت زير نشان داد:



مثال٤:

الف) $y(t) = 2x(t)$ معكوس‌پذير



سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

ب)

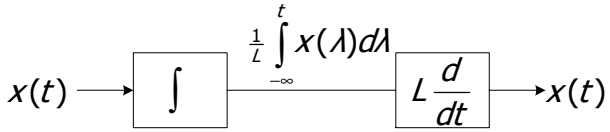
$$y(t)=x^2(t) \qquad \begin{cases} x(t)=1 \\ x(t)=-1 \end{cases} \Rightarrow y(t)=1$$

معکوس ناپذیر

ج)

$$y(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$$

باید ورودي بدهيم که خروجي را از حالت پايدار خارج نکند.



ن)

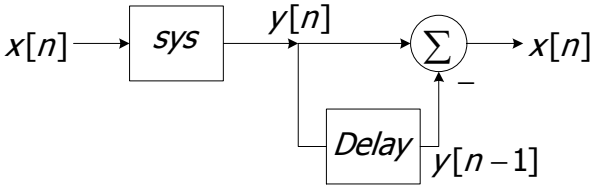
$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

چون به ازاي همه وردي‌هاي ثابت خروجي صفر مي‌شود پس معکوس‌پذير نيست.

و)

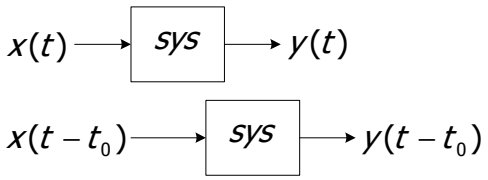
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y[n-1]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \qquad \Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]$$



۱-۱۱-۵- نامتغير با زمان (TI) Time invariant

اگر رفتار و مشخصه‌هاي سيستم در طي زمان ثابت باشد. به آن سيستم، نامتغير با زمان گفته مي‌شود.



مثال ۵)

الف)

$$y(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

با توجه به تعریف اگر شیفت یافته ورودي را به سیستم اعمال کنیم خروجي هم به همان اندازه شیفت پیدا کند، سیستم مورد نظر نامتغیر با زمان خواهد بود.

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys1} \longrightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} z(\tau)d\tau$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \quad \text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} z(\tau)\,d\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(t-t_0)\,d\tau \underset{t-t_0=\lambda}{=} \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau$$

$$\text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda)\,d\lambda \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

نامتغیربازمان

ب)

$$y(t) = \frac{1}{R(t)}x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys2} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{R(t)}x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys2} \longrightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{R(t)}z(t)$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{R(t)}x(t-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=} \frac{1}{R(t-t_0)}x(t-t_0)$$

متغیر با زمان

ج)

$$y(t) = t\,x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys3} \longrightarrow y(t) = t\,x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys3} \longrightarrow \text{خروجي} = t\,z(t)$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = t\,x(t-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=} (t-t_0)x(t-t_0)$$

متغیر با زمان

د)

$$y(t) = x(at)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys4} \longrightarrow y(t) = x(at)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys4} \longrightarrow \text{خروجي} = z(at)$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$z(t)=x(t-t_0)\Rightarrow \text{خروجي}=x(at-t_0)\overset{?}{=}y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=}x(a(t-t_0))$$ متغير با زمان

ن) $y[n]=r^n x[n]$

$$x[n]\longrightarrow \boxed{sys5}\longrightarrow y[n]=r^n\,x[n]$$

$$z[n]\longrightarrow \boxed{sys5}\longrightarrow \text{خروجي}=r^n\,z[n]$$

$$z[n]=x[n-n_0]\Rightarrow \text{خروجي}=r^n\,x[n-n_0]\overset{?}{=}y[n-n_0]$$

$$\overset{?}{=}r^{n-n_0}x[n-n_0]$$ متغير با زمان

ه) $y[n]=nx[n]$

$$x[n]\longrightarrow \boxed{sys6}\longrightarrow y[n]=n\,x[n]$$

$$z[n]\longrightarrow \boxed{sys6}\longrightarrow \text{خروجي}=n\,z[n]$$

$$z[n]=x[n-n_0]\Rightarrow \text{خروجي}=nx[n-n_0]\overset{?}{=}y[n-n_0]$$

$$\overset{?}{=}(n-n_0)x[n-n_0]$$ متغير با زمان

۱-۱۱-٦- خطي بودن

سيستم خطي به سيستمي گفته مي‌شود كه اصل جمع آثار براي آن صدق كند.

شرط خطي بودن:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)\longrightarrow \boxed{sys}\longrightarrow y(t)\\ x_1(t)\longrightarrow \boxed{sys}\longrightarrow y_1(t)\\ x_2(t)\longrightarrow \boxed{sys}\longrightarrow y_2(t)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1)\ x_1(t)+x_2(t)\longrightarrow \boxed{sys}\longrightarrow y_1(t)+y_2(t)\quad ;\text{جمع آثار}\\ 2)\ ax(t)\longrightarrow \boxed{sys}\longrightarrow ay(t)\quad ;\text{همگني}\end{array}\right.$$

تذكر: در برقراري همگني ضريب ثابت a هر عددي مي‌تواند باشد، حتي عدد مختلط.

مثال ٦)

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

الف) $y(t) = x^2(t)$ غيرخطي

$$(x_1 + x_2) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

ب) $y(t) = x(t)x(t-1)$ غيرخطي

$$ax(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow (ax(t))(ax(t-1)) = a^2 x(t)x(t-1) \neq ax(t)x(t-1)$$

۳) $y(t) = \sin(x(t))$ غيرخطي است چون توابع $\sin, \cos$ غيرخطي هستند.

ج) $y(t) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$a\,x(t) = a \rightarrow y(t) = 1$ خاصيت همگني نقض شده پس غيرخطي است.

د) $y[n] = nx[n]$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow n(x_1[n] + x_2[n]) = nx_1[n] + nx_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$
$$ax[n] \rightarrow n(ax[n]) = a(nx[n]) = a\,y[n]$$

خطي

ه) $y[n] = \text{Real}(x[n])$

$$x[n] = r + js \rightarrow y[n] = r$$
$$a\,x[n] = a(r + js) \Rightarrow if\ a = j2 \Rightarrow -2S \neq ay[n]$$

غيرخطي

ن) $y[n] = 2x[n] + 3$

$$x_1[n] + x_2[n] \Rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq (2x_1[n] + 3) + (2x_2[n] + 3)$$
$$\neq y_1[n] + y_2[n]$$

غيرخطي

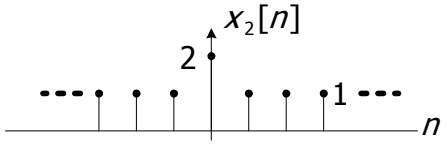
سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

نمونه مسائل فصل

۱- تعيين كنيد كدام يك از سيگنال هاي زير متناوبند؟

الف) $x_2[n] = u[n] + u[-n]$

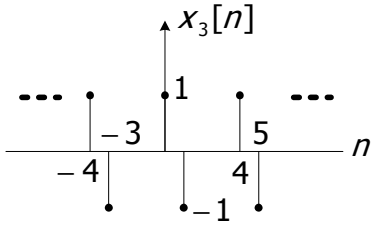
يك راه تشخيص متناوب بودن رسم سيگنال است.



وجود يك ناپيوستگي در نقطه صفر باعث مي‌شود كه نامتناوب شود.

ب) $x_3[n] = \sum \delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]$

در هر دوره تناوب $N = 4$ ، ۲ ضربه را شامل شده است.



ج) $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{4\pi}{7}} = 7k = 7\ (k=1) \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5k = 5\ , (k=1) \quad \Rightarrow N = 35$$

۲- تعيين كنيد كدام يك از سيگنال‌هاي زير معكوس‌پذير است؟

الف) $y[n] = x[n]\ x[n-2]$

$$x[n] = A\delta[n]\ ,\ y[n] = A^2\delta[n]\ \delta[n-2] = 0\ ,\ x[n] = \delta[n-3]$$
$$\Rightarrow y[n] = \delta[n-3]\delta[n-5] = 0$$

حافظه‌دار است ولي معكوس‌پذير نيست.

ب) $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

$$= x[n+1]u[n] + x[n]u[-n-1]\ ,$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$if\ \ x[n]=u[n]\Rightarrow y[n]=\underbrace{u[n+1]u[n]}_{\substack{n\ge -1\,,\,n\ge 0\\ =u[n]}}+\underbrace{u[n]u[-n-1]}_{\substack{n\ge 0\,,\,n\le -1\\ =0}}=u[n]$$

$$if\ \ x[n]=u[n-1]\Rightarrow y[n]=\underbrace{\underbrace{u[n]u[n]}_{n\ge 0,n\ge 0}}_{u[n]}+\underbrace{\underbrace{u[n-1]u[-n-1]}_{n\ge 1,n\le -1}}_{=0}=u[n]$$

معکوس‌پذیر نیست.

تمرین) آیا این سیستم معکوس‌پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوسش را به دست آورید.

$$y[n]=\begin{cases} x[n-1] & n\ge 1\\ 0 & n=0\\ x[n] & n\le -1\end{cases}$$

۱-۱۲- خلاصه

سيگنال تابعي است كه حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فيزيكي يك سيستم است.

هر سيگنال دلخواه را مي‌توان به صورت مجموع دو سيگنال زوج و فرد نوشت.

در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي‌توان سيگنال را به صورت زوج يا فرد درآورد.

كوچكترين دوره تناوب سيگنال دوره تناوب اصلي است و فركانس متناسب با دوره تناوب اصلي فركانس اصلي است.

توابعي كه فرم هندسي دارند را مي‌توان بر حسب توابع ويژه بيان كرد.

توابع ضربه واحد، پله واحد و دوبلت واحد خواص منحصر به‌فردي دارند.

اگر سيستمي با ورودي محدود و خروجي نامحدود داشتيم اين سيستم ناپايدار است.

سيستم بدون حافظه مطمئنا علي است.

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

فصل دوم

سيستم‌هاي LTI زمان پيوسته و زمان گسسته

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۲-۱- خواص سيستم‌هاي LTI با توجه به رابطه كانولوشن

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

زمان پيوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

۲-۱-۱- جابه‌جايي‌پذيري

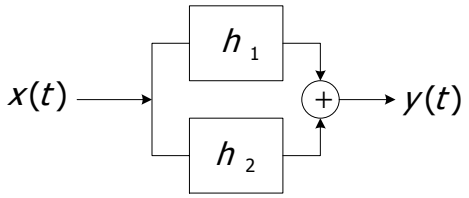
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

,

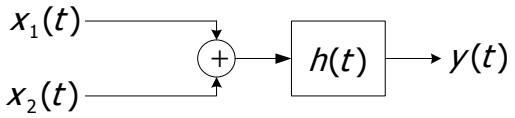
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

۲-۱-۲- توزيع‌پذيري

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



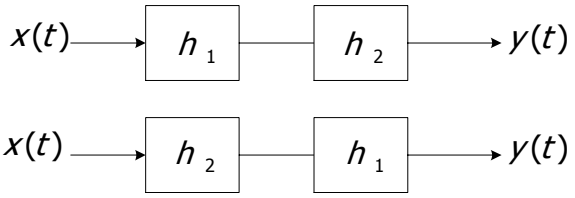
$$y(t) = (x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$



۲-۱-۳- شركت‌پذيري

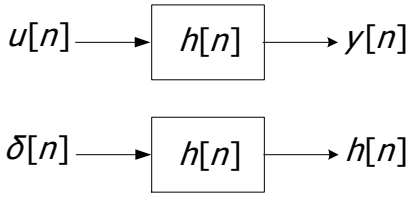
$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = x(t) * (h_2(t) * h_1(t))$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM



۲-۲- رابطه بین پاسخ ضربه h(t) و پاسخ پله

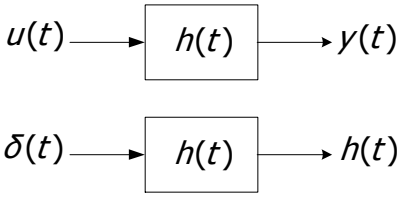
زمان گسسته



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$h[n] = y[n] - y[n-1]$$

زمان پیوسته



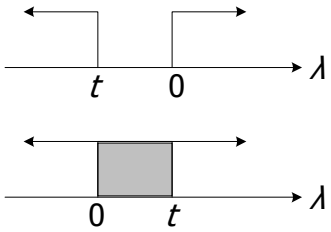
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\, d\lambda$$

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

مثال ۱) پاسخ پله سیستم‌هاي LTI زیر را بدست آورید.

الف) $h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} u(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \quad ; \\ \int_{0}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} d\lambda = 1 - e^{\frac{-t}{RC}} & , \quad t \geq 0 \quad ; \end{cases}$$



$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t)$$

ب) $h[n] = (-a)^n u[n]$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}(-a)^k u[k]=\begin{cases}0 & , \quad n<0\\ \sum_{k=0}^{n}(-a)^k=\dfrac{1-(-a)^{n+1}}{1-(-a)} & , \quad n\geq 0\end{cases}=\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}u[n]$$

۲-۳- خواص سيستم‌هاي LTI با توجه به تابع تبديل

۲-۳-۱- حافظه

زمان گسسته

$$x[n]\longrightarrow\boxed{h[n]}\longrightarrow y[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,x[n-k]$$

شرط بدون حافظه بودن سيستم:

$$h[n]=0 \quad ; n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

زمان پيوسته

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$h(t)=0 \quad ; t\neq 0$$

اثبات (سيستم زمان گسسته):

$$y[n]=\ldots+h[-1]x[n+1]+h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+\ldots$$

اين سيستم به شرطي بدون حافظه است كه خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه وابسته باشد كه براي اين منظور بايستي:

$$h[n]=0 \quad , \quad n\neq 0 \quad \Rightarrow h[n]=\delta[n] \quad \text{يا} \quad h[n]=k\,\delta[n] \quad ; \quad k=cte$$

۲-۳-۲- معكوس پذيري

زمان پيوسته

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow\boxed{h_I(t)}\longrightarrow y(t)=x(t)$$

$$x(t)=(h(t)*h_I(t))*x(t)$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$\delta(t) * x(t) = x(t) \Rightarrow \quad h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \boxed{h_I[n]} \longrightarrow y[n] = x[n]$$

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

۲-۳-۳- علیت

در سیستم علي خروجي به آينده ورودي بستگي ندارد. با توجه به رابطه $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$ شرط زير براي تابع تبديل (پاسخ ضربه) بيانگر سيستم علي خواهد بود.

زمان گسسته

$$h[n] = 0 \quad ; \quad n < 0$$

زمان پيوسته

$$h(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$

تذكر: تابع تبديل $h(t) = u(t)$ ($h[n] = u[n]$) بيانگر سيستم علي است.

۲-۳-۴- پايداري(BIBO*)

زمان پيوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|\,|x(t-\lambda)|\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|\, d\lambda < \infty$$

شرط پايداري: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

---

* Bounded Input Bounded Output

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

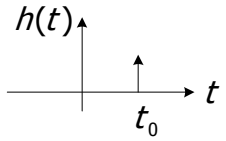
$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

شرط پايداري: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

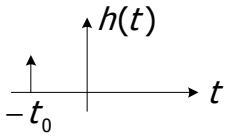
مثال ۲) با استفاده از تابع تبديل خواص سيستم‌هاي LTI را بررسي كنيد.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$$

الف) علي بودن



$$h(t) = y(t)\big|_{x(t)=\delta(t)} \Rightarrow h(t) = \delta(t-t_0) = \begin{cases} t_0 \ge 0\,; & \text{سيستم علي} \\ t_0 < 0\,; & \text{سيستم غير علي} \end{cases}$$



ب) سيستم معكوس

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t) \;\;,\;\; \delta(t-t_0) * h_I(t) = \delta(t) \quad , \quad h_I(t-t_0) = \delta(t) \xrightarrow{t-t_0=t'} h_I(t') = \delta(t'+t_0)$$

معكوس‌پذير

ج) پايداري

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-t_0)|\,dt < \infty \quad \text{پايدار}$$

مثال ۳)

۱الف) $h(t) = e^{at}\,u(t)$

علي و حافظه‌دار ,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at}\,u(t)|\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{at}\,dt = \begin{cases} a < 0 & \text{پايدار} \\ a \ge 0 & \text{ناپايدار} \end{cases}$$

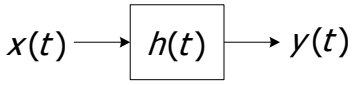
۲ب) $h[n] = a^n\,u[n+2]$ $\qquad n \ge -2\,,$

غيرعلي و حافظه‌دار

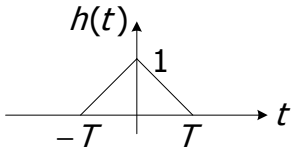
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k\,u[k+2]| = \sum_{k=-2}^{\infty} |a^k| \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 & , \text{پايدار} \\ |a| > 1 & , \text{ناپايدار} \end{cases}$$

تمرين۱: مطلوب است ترسيم y(t) ؟

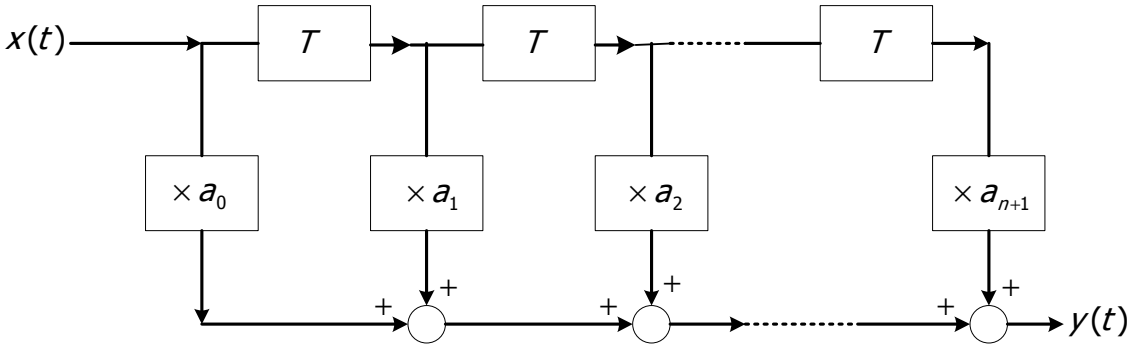
سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2kT)$$

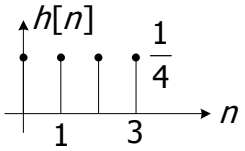


تمرین ۲: مطلوب است پاسخ ضربه سیستم ذیل h(t)=?



مثال ۳) رابطه بین ورودي دلخواه x[n] و خروجي y[n] را براي پاسخ ضربه سیستم LTI داده شده بدست آورید.

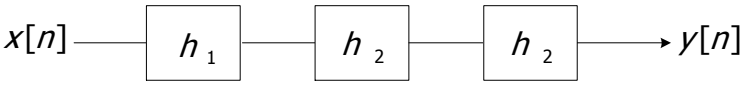
$$h[n]=\begin{cases}\frac{1}{4} & , \quad 0\le n\le 3\\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$



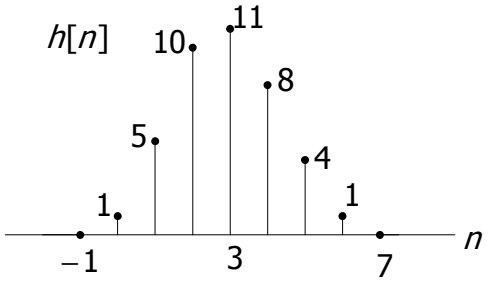
$$h[n]=\frac{1}{4}(u[n]-u[n-4])=\frac{1}{4}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\frac{1}{4}(x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3])$$

مثال ۴) اگر $h_2[n]=u[n]-u[n-2]$ الف) مقدار $h_1[n]$ را بدست آورید، تابع تبدیل کل سیستم h[n] داده شده است.



سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



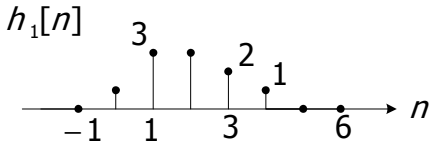
$$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad , \quad h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_2[n])$$

$$h_2[n] * h_2[n] = (\delta[n] + \delta[n-1]) * (h_2[n]) = h_2[n] + h_2[n-1]$$
$$= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1] + \delta[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$\Rightarrow h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$$

اولين جايي كه h[n] مقدار دارد $n = 0$ است پس در نمودارهاي بالا به ازاي $n = 0$ داريم:

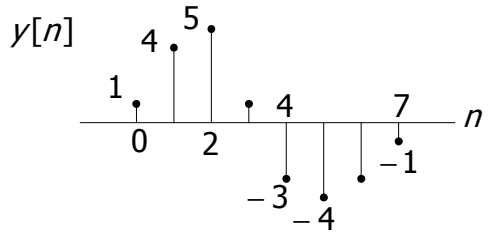
$$a_0 + 2a_{-1} + a_{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1$$
$$a_1 + 2a_0 = 5 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3$$
$$a_2 + 2a_1 + a_0 = 10 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 3$$
$$a_3 + 2a_2 + a_1 = 11 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 2$$
$$a_4 + 2a_3 + a_2 + 8 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1$$
$$a_5 + 2a_4 + a_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 0$$
$$a_6 + 2a_5 + a_4 + 1 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 0 \ldots$$



ب) اگر x[n] برابر باشد با $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ مطلوب است مقدار خروجي y[n] ؟

اين قسمت كاملا مستقل از قسمت قبل است چون x[n] داده شده است.

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] - h[n-1]$$



سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۲-۴- کانولوشن (زمان پیوسته)

۲-۴-۱- روش ترسيمي

توصيه مي‌شود اگر f(t) به لحاظ رياضي ساده‌تر است از فرمول ۲ و اگر g(t) ساده‌تر است از فرمول ۱ استفاده مي‌كنيم.
دراين مثال از فرمول ۲ استفاده مي كنيم.

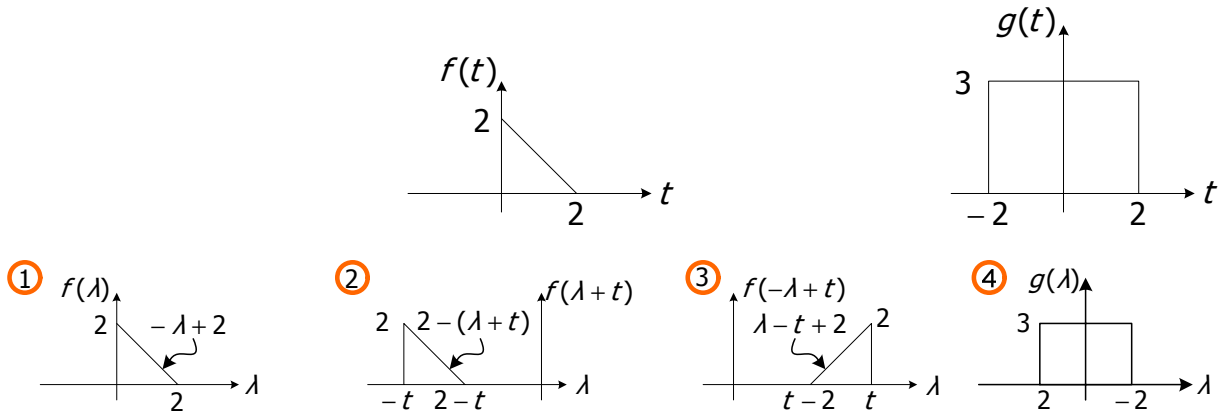
$$y(t) = f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda}_{1} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, f(t-\lambda)\, d\lambda}_{2}$$

$f(\lambda)\ ,\ g(\lambda)$ را مي‌سازيم.

براي ساخت $f(t-\lambda)$ اول بايد $f(t+\lambda)$ را ساخت چون نمي‌دانيم كه t مثبت است يا منفي است پس به صورت قراردادي t واحد به سمت چپ شيفت مي‌دهيم. سپس $f(t-\lambda)$ را مي‌سازيم از اين مرحله به بعد بايد در هر مرحله معادله خط كنار نمودار نوشته شود.

حال $g(\lambda)$ را ثابت نگه داشته و $f(t-\lambda)$ را از $-\infty$ به سمت $+\infty$ شيفت مي‌دهيم. بديهي است در جايي كه دو تابع همپوشاني نداشته باشند حاصلضرب صفر است. سپس به نقطه اي مي‌رسد كه max همپوشاني را دارد و بعد دوباره به جايي مي‌رسد كه هيچ همپوشاني نداشته باشند:

مثال ۵)



سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$\begin{cases} t < -2 \quad , & * = 0 \\ -2 \le t < 0 \quad , & * = \int_{-2}^{t} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = \frac{3}{4}(4 - t^2) \\ 0 \le t < 2 \quad , & * = \int_{t-2}^{t} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = 6 \\ 2 \le t \le 4 \quad , & * = \int_{t-2}^{2} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = \frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) \\ t \ge 4 \quad , & * = 0 \end{cases}$$

۲-۴-۲- استفاده از فرمول

اگر با استفاده از فرمول بخواهيم كانولوشن دو سيگنال را بدست بياوريم. بايد معادله دو سيگنال بر حسب توابع رياضي داده شده باشند يا اينكه بتوان آنها را بر حسب توابع ويژه فرموله نمود.

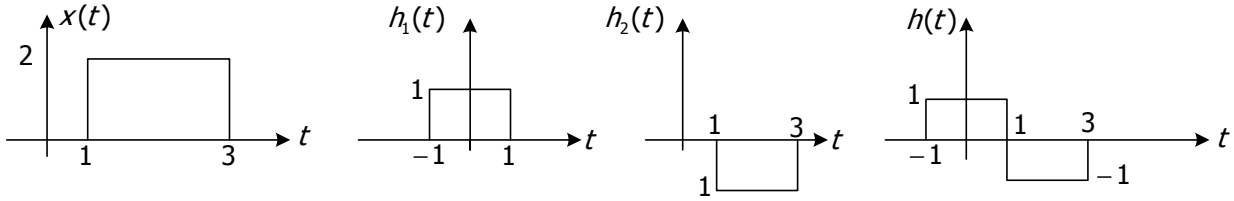
براي مثال قبل f(t) , g(t) را بايد به فرم زير نوشت و سپس در فرمول كانولوشن جايگذاري كرد:

$$f(t) = 2u(t) - r(t) + r(t-2) \qquad , \qquad g(t) = 3(u(t+2) - u(t-2))$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۱)

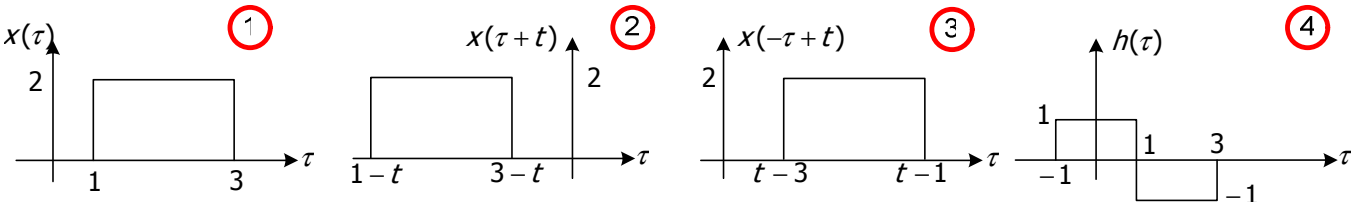
$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3) \quad , \quad h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

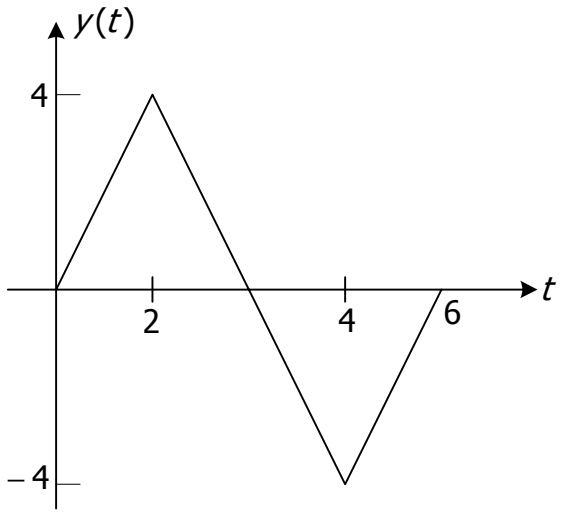
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$



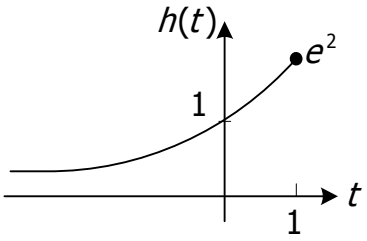
$$\begin{cases} t-1<1 \quad , \quad * = 0 \\ -1 \le t-1 < 1 \quad , \quad * = \int_{-1}^{t-1} 2d\tau = 2t \\ 1 \le t-1 < 2 \quad , \quad * = \int_{t-3}^{1} 2d\tau + \int_{1}^{t-1} -2d\tau = 12-4t \\ 2 \le t-1 < 3 \quad , \quad * = \int_{t-3}^{1} 2d\tau + \int_{1}^{t-1} -2d\tau = 12-4t \\ 3 \le t-1 < 4 \quad , \quad * = \int_{t-3}^{3} -2d\tau = -2(6-t) \\ t-1 \ge 5 \quad , \quad * = 0 \end{cases}$$

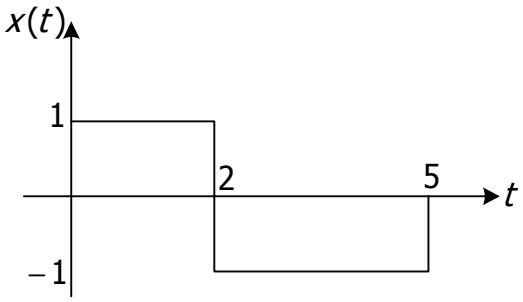
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



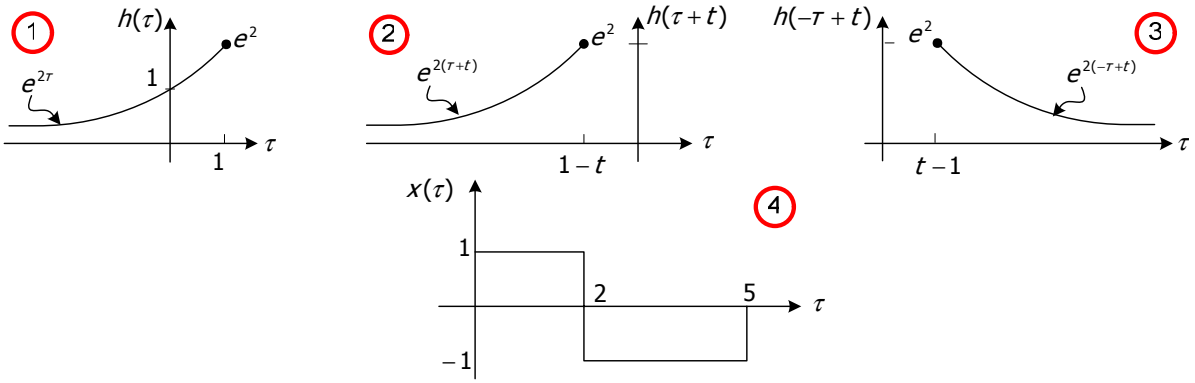
تذكر: وقتي دو تابع پالسي باهم كانوالو مي‌شوند حاصل يك تابع ذوزنقه مي‌شود و اگر اين دو تابع پالسي هم عرض باشد شكل حاصل يك تابع مثلثي خواهد بود.

مثال ۲) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \quad , \quad h(t) = e^{2t}u(1-t)$





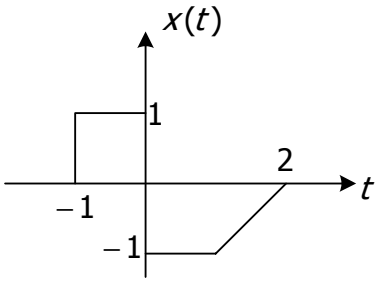
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$\begin{cases} t-1>5 \quad , & * = 0 \\ 2<t-1\le 5 \quad , & * = \int_{t-1}^{5} e^{2(-\tau+t)} \times (-1) d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-5)} - e^{2} \\ 0<t-1\le 2 \quad , & * = \int_{t-1}^{2} e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_{2}^{5} e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2}(e^{2} - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \\ t-1\le 0 \quad , & * = \int_{0}^{2} e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_{2}^{5} -e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \end{cases}$$

تمرين: سيستم LTI با پاسخ ضربه h(t) داده شده. پاسخ سيستم به ورودي x(t) را بدست آوريد و مقدار خروجي را در لحظات $t=-\frac{1}{4}$, $t=\frac{3}{4}$, $t=\frac{3}{2}$, $t=+\infty$ محاسبه كنيد.



$$h(t) = e^{-t}\delta(t) + u(t) \quad , \quad y(t) = x(t) * h(t) \quad ?$$

۲-۵- كانولوشن زمان گسسته

۲-۵-۱- روش ترسيمي

$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]}_{1} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]}_{2}$$

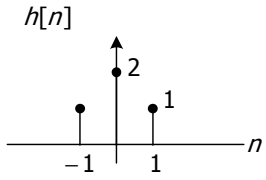
پس از تصميمگيري راجع به اينكه از رابطه ۱ يا رابطه ۲ خروجي y[n] را حساب كنيم، مراحل انجام عمليات عينا شبيه زمان پيوسته است.

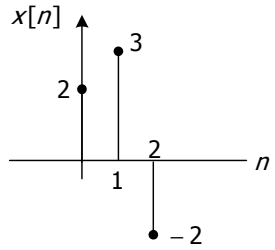
روش ترسيمي را براي تعيين خروجي سيستم زمان گسسته مطرح ميكنيم:

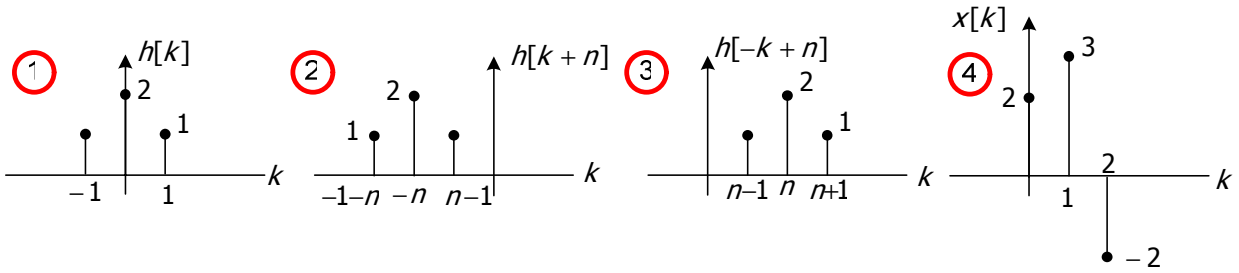
مثال ۳)

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \\ 2 & n = 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad x[n] = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ -2 & n = 2 \end{cases}$$

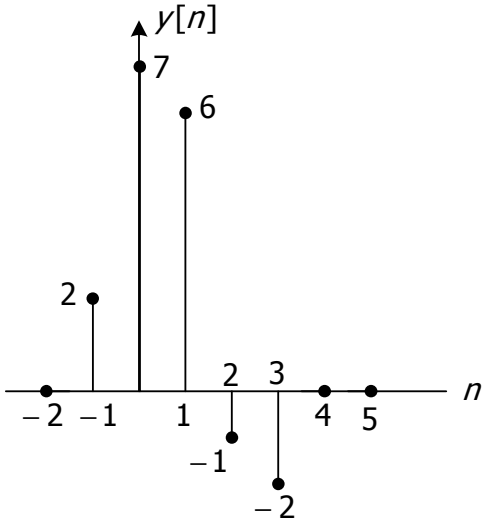
سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM







$$\begin{cases} n+1<0 \quad , \quad * = 0 \\ n+1=0 \quad , \quad * = 1\times 2 = 2 \\ n+1=1 \quad , \quad * = 2\times 2 + 1\times 3 = 7 \\ n+1=2 \quad , \quad * = 1\times 2 + 2\times 3 - 2\times 1 = 6 \\ n+1=3 \quad , \quad * = 1\times 3 + 2\times(-2) = -1 \\ n+1=4 \quad , \quad * = 1\times(-2) = -2 \\ n+1\geq 5 \quad , \quad * = 0 \end{cases}$$



۲-۵-۲- استفاده از فرمول

ابتدا باید توابع را بر حسب توابع ویژه و یا توابع ریاضي بیان کرد. اگر ورودي و یا پاسخ ضربه بر حسب تابع ضربه بیان شده باشند، بدلیل خاصیت تابع ضربه محاسبه کانولوشن بسیار راحت خواهد بود.

مثال ٤)

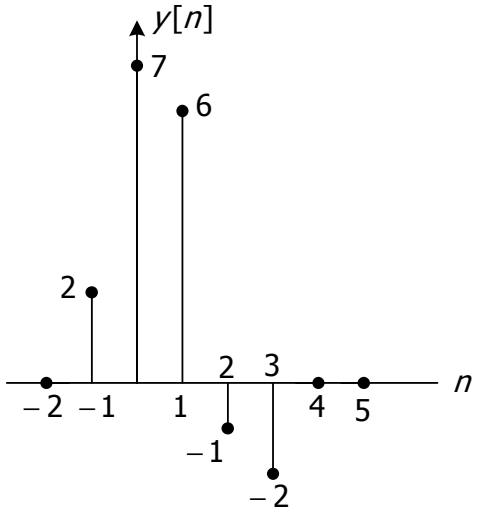
$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1] \qquad , \qquad x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$= (2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]) * h[n]$$
$$= 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]$$

یا

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$= x[n] * (\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1])$$
$$= x[n+1] + 2x[n] + x[n-1]$$



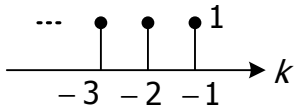
بديهي است پاسخ محاسبه شده در هر دو حالت يكسان خواهد بود:

مثال ٥)

$$x[n] = (\frac{1}{3})^{-n} u[-n-1] \quad , \quad h[n] = u[n-1]$$

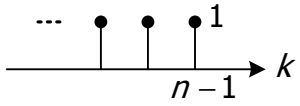
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{3})^{-k} u[-k-1] \cdot u[n-k-1]$$

$$u[-K-1] = \begin{cases} 1 & ; \quad k \le -1 \\ 0 & ; \quad k > 1 \end{cases}$$



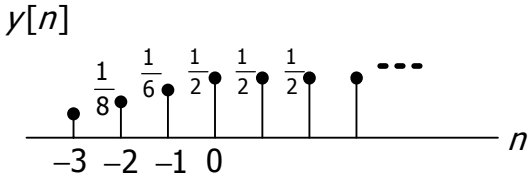
$\Rightarrow$

$$u[n-K-1] = \begin{cases} 0 & ; \quad k \le n-1 \\ 1 & ; \quad k > n-1 \end{cases}$$



$$n-1 < -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} (\frac{1}{3})^{-k} \overset{k \to -k}{=} \sum_{k=-n+1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{k} = (\frac{1}{3})^{-n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{-n+1} = \frac{3}{2}(3)^{n-1} = \frac{1}{2}(3)^{n}$$

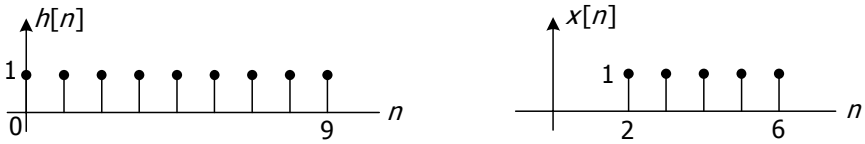
$$n-1 \ge -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\frac{1}{3})^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

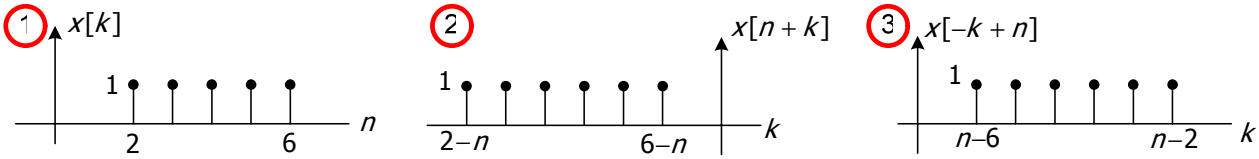


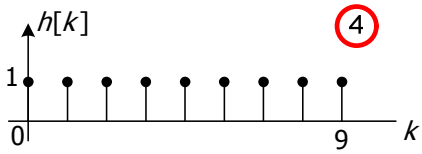
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

مثال٦) $y[n]=?$, $h[n]=u[n]$, $x[n]=a^n u[n] \quad 0<a<1$

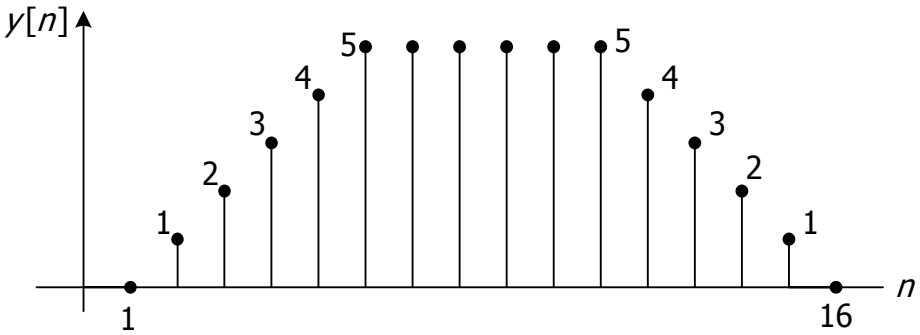
مثال ٧) $x[n]=u[n-2]-u[n-7]$, $h[n]=u[n]-u[n-10]$







$$n-2<0\,,\quad *=0 \qquad n-2=10,\quad *=4$$
$$n-2=0\,,\quad *=1 \qquad n-2=11,\quad *=3$$
$$n-2=2\,,\quad *=2 \qquad n-2=12,\quad *=2$$
$$n-2=3\,,\quad *=4 \qquad n-2=13,\quad *=1$$
$$\begin{cases} n-2=4\,,\quad *=5 \\ \vdots \\ n-2=9,\quad *=5 \end{cases} \qquad n-2\geq 14,\quad *=0$$



سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۲-٦- سيستم‌هاي LTI توصيف شده با معادلات ديفرانسيل(زمان پيوسته)

به طور كلي معادله ديفرانسيل يك سيستم به فرم روبه‌رو نوشته مي‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y(t)$$

براي حل معادله ديفرانسيل بايد

۱) معادله همگن حل شود.

۲)جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص تعيين گردد.

۳) جواب كلي سيستم عبارت است از پاسخ عمومي + پاسخ خصوصي و با توجه با اين كه پاسخ عمومي داراي تعدادي ضرايب ثابت است اين ضرايب از روي شرايط سكون يا شرايط اوليه به دست مي‌آيند.

۱) $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d^k t} = 0 \Rightarrow y_h(t) = \ldots$

۲) $y_p(t) = \ldots$

۳) $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

تذكر: براي بكارگيري شرايط سكون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است. در غيراينصورت بايستي شرايط اوليه داده شده باشد.

مثال ۸)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = t \quad , \quad t > 0 \, , \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$
$$\Rightarrow y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t}$$

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \quad , \quad t \geq 0 \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + c \Rightarrow y_p(t) = (t-2)$$

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t} + (t-2) \quad , \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = (2+t)e^{-t} + (t-2) \, , \, t > 0$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۹) معادله ديفرانسيل سيستم LTI و علي داده شده است. مطلوبست پاسخ سيستم به ازاي ورودي داده شده:

$$y'(t)+2y(t)=x(t) \quad , \quad x(t)=\begin{cases}0; & t\le -1\\ 1; & t>-1\end{cases}$$

حل:

۱) $y'(t)+2y(t)=0 \Rightarrow \lambda=-2 \quad , \quad y_h(t)=K_1\,e^{-2t}$

۲) $y'(t)+2y(t)=1; \quad t>-1\,,\ y_p(t)=\dfrac{1}{2}$

۳) اعمال شرط سكون بر اساس علي بودن سيستم

$$\begin{cases}y(t)=K_1\,e^{-2t}+\dfrac{1}{2}; & t>-1\\ y(-1)=0\end{cases} \Rightarrow y(t)=-\frac{1}{2}e^{-2(t+1)}+\frac{1}{2}; \quad t>-1$$

يا

$$y(t)=(-\frac{1}{2}e^{-2(t+1)}+\frac{1}{2})u(t+1)$$

۲-۷- پاسخ به ورودي ضربه:

۲-۷-۱- استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI:

با يك مثال اين رابطه را بررسي مي‌كنيم.

مثال ۱۰) سيستم LTI و علي است.

$$y''(t)+y'(t)-2y(t)=x(t) \quad , \quad x(t)=\delta(t)$$

حل: $z''(t)+z'(t)-2z(t)=u(t)$

$$z''(t)+z'(t)-2z(t)=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}-2\\ 1\end{cases}$$

$$z_h(t)=K_1\,e^{-2t}+K_2\,e^{t}$$

$$z_p(t)=-\frac{1}{2}$$

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$\begin{cases} z(t) = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t} - \frac{1}{2}; \;\; t > 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} - \frac{1}{2}; \quad t > 0$$

(مشتق پاسخ پله = پاسخ ضربه)

$$z(t) = (\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} - \frac{1}{2})\, u(t)\,; \quad y(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t})\, u(t) + (\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} - \frac{1}{2})\, \delta(t) \Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t})\, u(t)$$

۲-۷-۲- محاسبه پاسخ ضربه سیستم بطور مستقیم

جهت محاسبه پاسخ ضربه سیستم LTI پاسخ معادله همگن را بدست آورده و آن را بعنوان پاسخ کامل سیستم در نظر مي‌گيريم. پاسخ کامل باید در معادله دیفرانسیل صدق کند که بدین ترتیب ضرایب ثابت محاسبه و پاسخ کامل، که همان پاسخ ضربه سیستم LTI است تعیین خواهد شد.

حال مثال ۱۰ را به این روش مجددا حل مي‌كنيم:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

$$y_h(t) = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t} \Rightarrow y(t) = (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t}) u(t)$$

$$y'(t) = (-2K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, u(t) + (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t}) \delta(t)$$

$$y''(t) = \ldots = (4K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, u(t) + (-4K_1\, e^{-2t} + 2K_2\, e^{t})\, \delta(t) + (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, \delta'(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (-3K_1\, e^{-2t} + 3K_2\, e^{t})\, \delta(t) + (K_1 + K_2)\, \delta'(t) - (-2K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, \delta(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t})\, u(t) = h(t)$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

۲-۸- سيستم‌هاى LTI توصيف شده با معادلات تفاضلي (زمان گسسته)

هدف از تحليل معادله تفاضلي:

۱) رابطه مستقيمي بين ورودي و خروجي به دست آوريم .

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$x[n]=\delta[n] \Rightarrow y[n]=h[n]$$

۲) خروجي را به ازاي ورودي مشخص پيدا كنيم.

۲-۸-۱- روش حل معادله تفاضلي

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\ y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k\ x[n-k]$$

الف) روش مستقيم:

$y[n]=y_h[n]+y_p[n]$ پاسخ كامل: , $y_p[n]$ پاسخ خاص: , $y_h[n]$ پاسخ عمومي:

با فرض آنكه معادله تفاضلي مرتبه دوم است N=2 ، براي بدست آوردن جواب عمومي مراحل زير را انجام مي‌دهيم:

$$a_0\ y[n]+a_1 y[n-1]+a_2\ y[n-2]=0$$

$$y_h[n]=K\,r^n \Rightarrow (a_0+a_1 r^{-1}+a_2 r^{-2})\cdot kr^n=0$$

$y_h[n]=k_1(r_1)^n+k_2(r_2)^n$ حقيقي و متمايز r_1 ، r_2

$y_h[n]=k_1(r_1)^n+k_2 n(r_2)^n$ $r_1=r_2$

مثال ۱) مطلوب است خروجي اگر $x[n]=n^2$ و $y[0]=1$ باشد.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

پاسخ عمومي:

$$y[n]+2y[n-1]=0 \Rightarrow y_h[n]=k\,r^n \Rightarrow k\,r^n+2k\,r^{n-1}=0$$

$$k\,r^n(1+2\,r^{-1})=0 \Rightarrow r=(-2) \Rightarrow y_h[n]=k(-2)^n$$

پاسخ خصوصي:

$$y[n]+2y[n-1]=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

سراى دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$y_p[n] = An + B \Rightarrow An + B + 2(A(n-1) + B) = 2n - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3A = 2 \\ -2A + 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$$

جواب خصوصي $\Rightarrow y_p[n] = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$

پاسخ كامل:

$$\begin{cases} y[n] = k(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{8}{9}; \quad y[n] = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \\ y[0] = 1 \end{cases}$$

ب) روش بازگشتي

با يك مثال اين روش را يررسي مي‌كنيم:

مثال ۲) سيستم LTI و علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد.

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه h[n]

ب) پاسخ ضربه معكوس $h_I[n]$

ج) به ازاي ورودي داده شده $x[n] = \delta[n-1]$ خروجي را بدست آوريد.

الف) $h[n] = y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]}$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] + \delta[n]$$

روش بازگشتي:

$$h[0] = \frac{1}{4}h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = \frac{1}{4}h[0] = \frac{1}{4}(1)$$

$$h[2] = \frac{1}{4}h[1] = \frac{1}{4}(1)^2$$

$$\vdots$$

$$h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] = (\frac{1}{4})^n \Rightarrow h[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$$

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

ب) براي بدست آوردن $h_I[n]$ بايد فرمول زير برقرار باشد:

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, h_I[n-k] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{4})^k\, u[k]\, h_I[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^k\, h_I[n-k] = \delta[n]$$

سؤال: اگر سيستمي LTI و علي باشد آيا معكوس سيستم نيز LTI و علي خواهد بود؟

$$h_I[n] + \frac{1}{4} h_I[n-1] + (\frac{1}{4})^2 h_I[n-2] + (\frac{1}{4})^3 h_I[n-3] + \cdots = \delta[n]$$

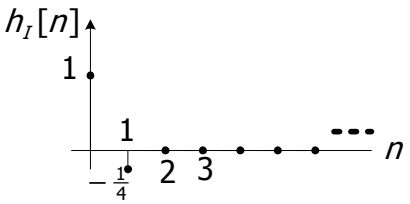
روش بازگشتي:

$$h_I[0] = 1$$

$$h_I[1] + \frac{1}{4} h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[1] = -\frac{1}{4}$$

$$h_I[2] + \frac{1}{4} h_I[1] + (\frac{1}{4})^2 h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[2] = 0$$

$$h_I[3] = 0 \quad , \cdots \Rightarrow h_I[n] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]$$



ج) پاسخ ضربه سيستم h[n] در قسمت الف بدست آورده شد، با توجه به خاصيت TI (نامتغيربازمان) بودن سيستم داريم:

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = (\frac{1}{4})^n\, u[n]$$

$$x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y[n] = h[n-1] = (\frac{1}{4})^{n-1}\, u[n-1]$$

مثال ۳) سيستم LTI با معادله تفاضلي $y[n] + 2y[n-1] = x[n]$ توصيف شده است. با فرض سكون اوليه (علي) پاسخ ضربه را به دست آوريد.

تذكر: اگر ورودي ضربه واحد بود پيشنهاد مي‌شود از روش بازگشتي معادله را حل كنيد.

روش اول: بكارگيري روابط بازگشتي و تعيين پاسخ به ازاء ورودي خاص با توجه به شرط سكون اوليه

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

$$h[n] + 2h[n-1] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = -2h[n-1] + \delta[n]$$

$$h[0] = -2h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = -2h[0] = -2$$

$$h[2] = -2h[1] = (-2)^2$$

$$h[3] = (-2)^3$$

$$\vdots$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$h[k]=(-2)^k \Rightarrow h[n]=(-2)^n u[n]$$

روش دوم: بدست آوردن خروجي بر حسب ورودي بطور كلي با استفاده از روابط بازگشتي.

$$\begin{aligned}
&y[n]+2y[n-1]=x[n]\\
&y[0]+2y[-1]=x[0]\\
&y[1]+2y[0]=x[1]\\
&y[2]+2y[1]=x[2]\\
&\vdots\\
&y[n-2]+2y[n-3]=x[n-2]\\
&y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1]\\
&y[n]+2y[n-1]=x[n]
\end{aligned}$$

براي بدست آوردن رابطه صريح خروجي بر حسب ورودي (FIR) به طريق ذيل عمل مي كنيم:

$$\begin{aligned}
&(-2)^n(y[0]+2y[-1]=x[0])\\
&(-2)^{n-1}(y[1]+2y[0]=x[1])\\
&(-2)^{n-2}(y[2]+2y[1]=x[2])\\
&\vdots\\
&(-2)^2(y[n-2]+2y[n-3]=x[n-2])\\
&(-2)^1(y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1])\\
&(-2)^0(y[n]+2y[n-1]=x[n])\\
&\overline{\sum}\qquad \Rightarrow y[n]=(-2)^0x[n]+(-2)^1x[n-1]+(-2)^2x[n-2]+\cdots+(-2)^n x[0]\\
&\qquad =\sum_{k=0}^{n}(-2)^k x[n-k]=\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}x[k]\\
&\Rightarrow h[n]=\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\delta[k]=(-2)^n\sum_{k=0}^{n}\delta[k]=(-2)^n u[n]
\end{aligned}$$

روش سوم: استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI

پاسخ پله:

$$z[n]+2z[n-1]=u[n]$$

پاسخ همگن:

$$\begin{aligned}
&z[n]+2z[n-1]=0\\
&z_h[n]=k(r)^n \Rightarrow k\,r^n(1+2\,r^{-1})=0 \Rightarrow r=-2 \Rightarrow z_h[n]=k(-2)^n
\end{aligned}$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

پاسخ خصوصي:

$$z[n]+2z[n-1]=1\ ,\ n\geq 0 \quad \Rightarrow z_p[n]=A \Rightarrow A+2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

پاسخ كامل:

$$z[n]=k(r)^n+\frac{1}{3}\ ,\ n\geq 0 \Rightarrow z[-1]=k(-2)^{-1}+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow z[n]=(\frac{2}{3})(-2)^n+\frac{1}{3}\ ,\ n\geq 0 \Rightarrow z[n]=[(\frac{2}{3})(-2)^n+\frac{1}{3}]u[n]$$

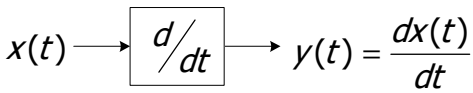
محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از پاسخ پله:

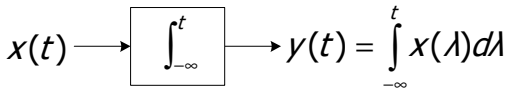
$$\Rightarrow h[n]=z[n]-z[n-1]=(\frac{2}{3})(-2)^n\ u[n]+\frac{1}{3}u[n]-\frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n-1]-\frac{1}{3}u[n-1]$$

$$\Rightarrow (\frac{2}{3})(-2)^n\ u[n]-\frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n]=(\frac{2}{3})(-2)^n[\frac{1}{2}+1]u[n]=(-2)^n\ u[n]$$

۲-۹- نمايش سيستم LTI با استفاده از بلوك دياگرام (مشتق‌گير و انتگرال‌گير)

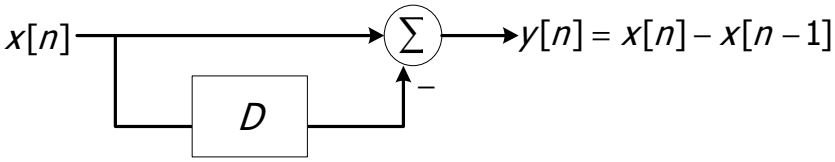
زمان پيوسته



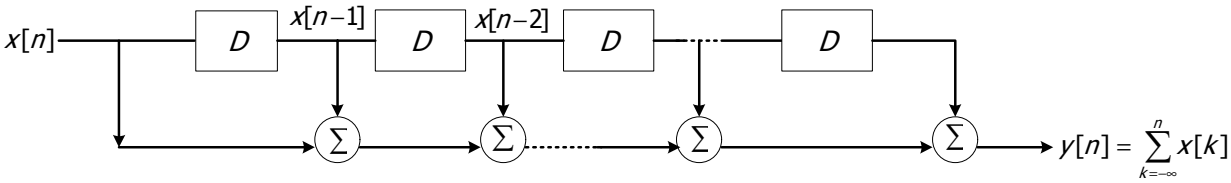


زمان گسسته

هم ارز با مشتق در پيوسته :



هم ارز با انتگرال در پيوسته :



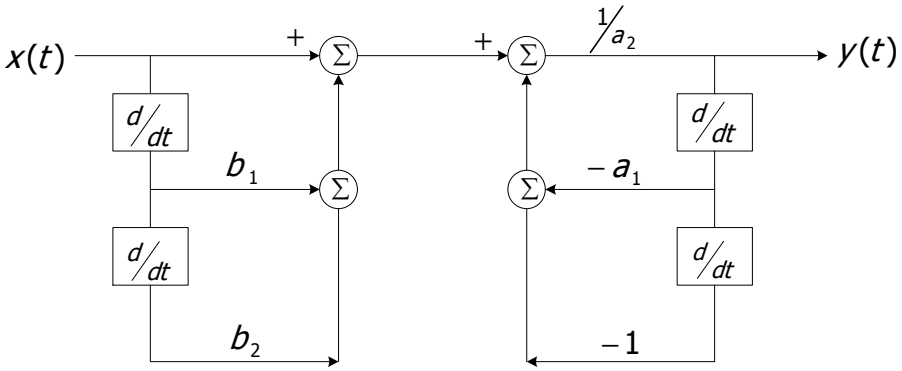
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

مثال ٤)

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=x(t)+b_1x'(t)+b_2x''(t)$$

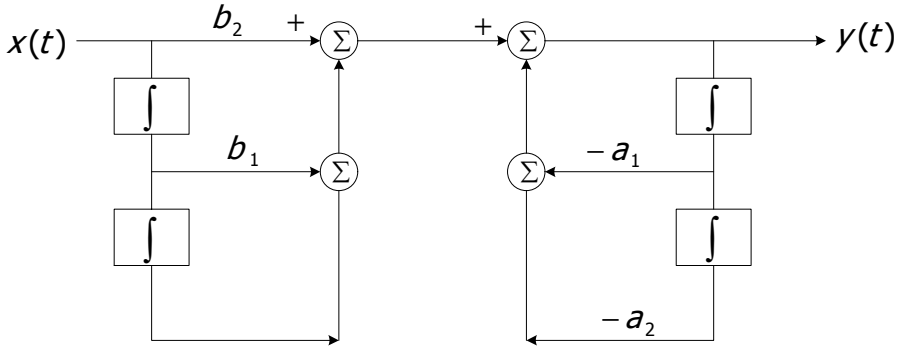
الف) نمايش سيستم با استفاده از بلوك‌هاي مشتق‌گير

$$y(t)=-\frac{a_1}{a_2}y'(t)-\frac{1}{a_2}y''(t)+\frac{1}{a_2}x(t)+\frac{b_1}{a_2}x'(t)+\frac{b_2}{a_2}x''(t)$$



ب) نمايش سيستم با استفاده از بلوك‌هاي انتگرال‌گير

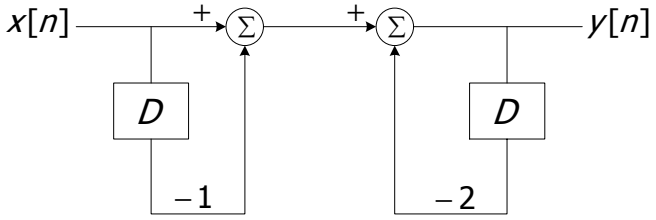
$$y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=x(t)+b_1x'(t)+b_2x''(t)$$
$$\Rightarrow y''(t)=-a_1y'(t)-a_2y(t)=x(t)+b_1x'(t)+b_2x''(t)$$
$$y(t)=-a_1\int y(t)dt-a_2\int\int y(t)dt+\int\int x(t)dt+b_1\int x(t)dt+b_2x(t)$$



مثال ٥)

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

$$y[n]=x[n]-x[n-1]-2y[n-1]$$



سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

تمرين: رسم بلوك دياگرام؟

سيستم زمان پيوسته

$$y'''(t)+3y''(t)+4y'(t)+5y(t)=x'(t)$$

سيستم زمان گسسته

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]$$

۲-۱۰- خلاصه

با توجه به رابطه كانولوشن مي‌توان خواص جابه‌جايي‌پذيري، توزيع‌پذيري و شركت‌پذيري را براي سيستم‌هاي LTI تعريف كرد.

با معرفي تابع تبديل مي‌توان خواص جديدي براي سيستم‌هاي LTI بيان كرد.

كانولوشن به دو روش ترسيمي و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات ديفرانسيل، با حل معادله همگن و يافتن جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص، جواب كلي سيستم از جمع پاسخ عمومي و پاسخ خصوصي بدست مي‌آيد.

براي بكارگيري شرايط سكون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است.

با استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI و يا محاسبه پاسخ ضربه سيستم به طور مستقيم مي‌توان پاسخ به ورودي ضربه را يافت.

سيستم‌هاي LTI را با استفاده از بلوك دياگرام نيز مي‌توان نشان داد.

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

فصل سوم

سري فوريه سيستم‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

۳-۱- تعاریف

۳-۱-۱-سیگنال متناوب

سیگنال متناوب است اگر $x(t) = x(t+T)$ و $T > 0$ بوده و دوره تناوب اصلي سيگنال $x(t)$ كوچكترين مقدار مثبت غيرصفر T است كه در رابطه بالا صدق مي‌كند. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ فركانس اصلي سيگنال خواهد بود.

مثال ۱)

الف) $x(t) = 2\sin(3t) \quad \Rightarrow \omega_0 = 3\,,\ T = \frac{2\pi}{3}$

ب) $x(t) = 4\cos(\sqrt{2}t) \quad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}\,,\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$

۳-۱-۲- دوره تناوب حاصل جمع دو سيگنال

به طور كلي قانون خاصي براي اين حالت وجود ندارد. در بعضي موارد اگر هر يك از سيگنال‌ها متناوب باشند حاصل‌جمع آنها نيز متناوب است و در بعضي موارد با وجود متناوب بودن هر يك از سيگنال‌ها، حاصل جمع آنها متناوب نيست.

مثال ۲)

الف) $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$= 2\pi \quad , \quad = \frac{4\pi}{3}$$

$$= 3\pi \quad , \quad = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

$$m = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \ , \ n = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

ب) $x(t) = 2\cos t + 4\cos(\sqrt{2}t)$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

عليرغم متناوب بودن تك‌تك سيگنال‌هاي تشكيل‌دهنده x(t)، اين سيگنال نامتناوب است.

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

تذکر: اگر $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ و دوره تناوب آنها به ترتیب T_1 , T_2 باشد حاصل جمع دو سیگنال زماني متناوب است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

(n_1 , n_2 باید اعداد صحیح مثبت و $\frac{n_1}{n_2}$ عدد کسري صحیح (گویا) باشد)

۳-۱-۳- دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال

۱- در صورت امکان پس از تبدیل حاصلضرب توابع به حاصلجمع دو تابع، دوره تناوب را به دست مي‌آوریم (چنانچه دوره تناوب را درهمان حالتي که در هم ضرب شده محاسبه کنیم دوره تناوب به دست آمده ممکن است دوره تناوب اصلي سیگنال نباشد.)

۲- چنانچه سیگنال حاصلضرب قابل تبدیل به حاصلجمع نبود، با توجه به رابطه $z(t)=x(t)\cdot y(t)$ و $z(t)=z(t+T)$ دوره تناوب $z(t)$ را در صورت وجود محاسبه مي‌کنیم.

مثال ۳)

الف) $z(t)=e^{j6t}\cos(10t)$

$$T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \quad , \quad T_2=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$$
$$=\frac{2\pi}{3} \quad , \quad =\frac{2\pi}{5}$$
$$=\frac{3\pi}{3}=\pi \quad , \quad \vdots \qquad \Rightarrow T=\pi$$
$$=\frac{5\pi}{5}=\pi$$

ب)

$$z(t)=e^{j6t}\cdot\frac{1}{2}(e^{j10t}+e^{-j10t})=\frac{1}{2}e^{j16t}+\frac{1}{2}e^{-j4t}$$
$$T_1=\frac{2\pi}{16}=\frac{\pi}{8} \quad , \quad T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{2\pi}{8}$$
$$=\frac{3\pi}{8} \qquad \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{4\pi}{8}$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

همانطور كه ملاحظه مي‌شود دوره تناوب محاسبه شده از حاصل‌ضرب دو سيگنال (π) دوره تناوب اصلي سيگنال يا كوچكترين دوره تناوب سيگنال $(\frac{\pi}{2})$ نمي‌باشد.

قضيه: اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t)=f(t+T)$ تابع $G(t)=f(f(t))$ نيز پريوديك با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلي تابع f(t) باشد، در اين صورت دوره تناوب اصلي G(t) لزوما T نيست.

مثال ٤)

الف)

$$f(t)=\cos(t) \Rightarrow \quad T_1=\frac{2\pi}{1}, \quad T=4\pi=6\pi=\ldots$$

$$g(t)=f^3(t) \Rightarrow g(t)=\cos^3 t=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t$$

$$T_1=\frac{2\pi}{1} \quad , \quad T_2=\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}$$

ب)

$$g(t)=\cos^4 t$$

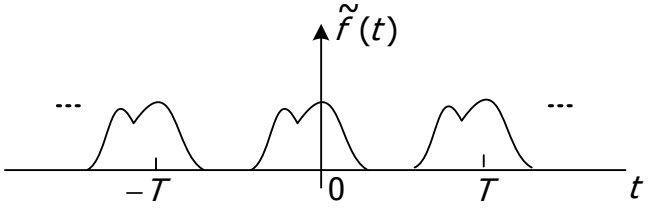
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t$$

$$T_1=\frac{2\pi}{2} \quad , \quad T_2=\frac{2\pi}{8}=\frac{4\pi}{4}$$

٣-١-٤- روش نوشتن توابع به صورت پريوديك

اگر سيگنال در طي يك دوره تناوب (T) فرموله شود (f(t))، با استفاده از رابطه زير سيگنال متناوب در كل زمان‌ها بيان مي‌شود $(\tilde{f}(t))$.

$$\tilde{f}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-KT)$$



سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

۳-۲- سري فوريه زمان پيوسته

سري فوريه، تنها براي توابع متناوب بيان مي‌شود، توابعي كه داراي دوره تناوب اصلي $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $x(t) = x(t+T)$ مي‌باشند. سري فوريه را به هر يك از دو فرم زير مي‌توان نمايش داد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

سؤال: چرا علاقمند هستيم كه سيگنال متناوب را به صورت مجموعي از نمايي‌هاي مختلط نمايش دهيم؟

۱) در صورت موفقيت، شناخت بهتري نسبت به سيگنال و محتواي فركانسي آن به‌دست مي‌آوريم. (در صورتي كه بتوان سيگنال را به صورت مجموعه اي از هارموني‌ها بسط داد، مي‌توان به اين سوال كه در يك سيگنال چه فركانس‌هايي و با چه قدرتي وجود دارند را پاسخ داد.)

۲) پاسخ سيستم LTI به نمايي مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ يا به طور كلي $e^{j\omega t}$ به فرم بسيار ساده‌اي تعريف مي‌شود.

تذكر ۱: هرچه هارموني‌ها بالاتر باشد فركانس‌ها بالاتر است و برعكس هر چه هارموني‌ها پايين‌تر باشد فركانس‌ها پايين‌تر است.

تذكر ۲: اگر سيگنالي در هارموني‌هاي بالا ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس بالا است و برعكس اگر سيگنالي در هارموني‌هاي پايين ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس پايين است.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} \quad \Rightarrow \quad T_1\big|_{k=\pm1} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad , \quad T_2\big|_{k=\pm2} = \frac{2\pi}{2\omega_0} \quad , \quad T_3\big|_{k=\pm3} = \frac{2\pi}{3\omega_0} \quad , \ldots$$

مثال ۵) دوره تناوب اصلي سيگنال زير چيست؟

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad , \quad T_3 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow T_0 = 1 \,,\, \omega_0 = \frac{2\pi}{1}$$

با توجه به رابطه اويلر:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{j(2\pi)t} + \frac{1}{4}e^{-j(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j2(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j(-2)(2\pi)t} + \frac{1}{3}e^{j3(2\pi)t} + \frac{1}{3}e^{j(-3)(2\pi)t}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1 \,, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \,, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \,, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

فرم ديگر سري فوريه (سيگنال‌هاي حقيقي):

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k\,e^{jk\omega_0 t}+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}$$

$$\overset{k\to -k}{\Rightarrow}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}\,e^{-jk\omega_0 t}+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}\,e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,e^{jk\omega_0 t})+(a_{-k}^{*}\,e^{jk\omega_0 t})^{*}$$

اگر $x(t)=x^{*}(t)$ باشد:

$$x^{*}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k^{*}\,e^{jk\omega_0 t}\quad,\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{-k}^{*}\,e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,e^{jk\omega_0 t})+(a_k\,e^{jk\omega_0 t})^{*}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}(a_k\,e^{jk\omega_0 t}),\quad a_k=A_k\cdot e^{j\theta k}$$

$$\Rightarrow a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}(A_k\,e^{j(k\omega_0 t+\theta)})=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

۳-۲-۱- تعيين ضرايب سري فوريه

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}$$

طرفين رابطه بالا را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب مي‌كنيم و از طرفين رابطه روي يك دوره تناوب انتگرال مي‌گيريم:

$$x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{j(k-n)\omega_0 t}\Rightarrow\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt}_{I}\ ,$$

$$I=\frac{1}{T}\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\cos(k-n)\omega_0 t\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T j\sin(k-n)\omega_0 t\,dt=\begin{cases}0 & k\neq n\\ 1 & k=n\end{cases}$$

اگر k=n باشد، مقدار I طبق اثبات برابر واحد شده كه در نتيجه ضرايب سري فوريه از رابطه زير بدست مي آيند

$$a_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}dt$$

۳-۲-۲- همگرايي سري فوريه

سؤال: سيگنال متناوب x(t) تحت چه شرايطي داراي نمايش سري فوريه است؟

شرايط ديريكله:

۱) سيگنال مطلقا انتگرال‌پذير باشند:

$$<x(t),x(t)>=\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot x(t)^{*}dt=\frac{1}{T}\int_T\left|x(t)\right|^2dt<\infty$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۲) براي يك سيگنال متناوب كه تعداد محدودي ناپيوستگي در هر دوره تناوب دارد، نمايش سري فوريه در همه جا به جز نقاط منفرد ناپيوستگي برابر سيگنال است و در نقاط ناپيوستگي سري به مقدار متوسط سيگنال در آن نقطه همگرا مي‌شود.

تذكر: در كليه موارد عملي سري فوريه را مي‌توان به كار برد. اما سيگنال‌هايي كه شرايط ديريكله را ارضاء نمي‌كنند طبيعت نامعقولي دارند، در نتيجه عموما در زمينه‌هاي عملي ظاهر نمي‌شوند.

مثال ٦)

الف)

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

$$= 1 + (\frac{1}{2j} + 1)\, e^{j\omega_0 t} + (-\frac{1}{2j} + 1)\, e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = a_{-1}^* = 1 + \frac{1}{2j} \quad , \quad a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j)$$

ب)

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{2j}$$

تمرين: سيگنال زير شامل چه هارموني‌هايي است؟

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j10\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-j10\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{j11\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-j11\omega_0 t}$$

يادآوري:

اگر $x(t) = x(t+T)$ در اين صورت سيگنال داراي سري فوريه است پس:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

"فرمول سنتز"

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt$$

" فرمول آناليز"

تذكر ۱: مجوعه ضرايب $\{a_k\}$ را ضرايب سري فوريه يا ضرايب طيفي x(t) مي‌نامند. اين ضرايب در حالت كلي مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني متناظر است.

تذكر ۲: ضريب a_0 مؤلفه DC يا ثابت سيگنال است كه از رابطه زير محاسبه مي‌شود:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$$

مقدار متوسط

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

تمرين۱: چه تفاوتي ميان $u(t)$ و $u(2t)$ و $u(\frac{t}{2})$ وجود دارد؟

تمرين۲:چه تفاوتي ميان $u(t-T_0)$ و $u(2t-T_0)$ و $u(\frac{t}{2}-T_0)$ وجود دارد؟

۳-۳- خواص سري فوريه زمان پيوسته

۳-۳-۱- خطي بودن

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) \xrightarrow{f_s} b_k \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0)$$
$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{f_s} z(t) = Aa_k + Bb_k \quad ; \quad z(t) = z(t+T_0)$$

۳-۳-۲- انتقال زماني

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{f_s} b_k = a_k\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0)$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}$$

۳-۳-۳- وارون‌سازي زماني

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) = x(-t) \xrightarrow{f_s} b_k = a_{-k} \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0)$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

الف) $x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k}$

ب) $x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = -a_{-k}$

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

۳-۳-٤- تغيير مقياس زماني

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \;;\quad x(t) = x(t+T_0)$$

$$y(t) = x(at) \xrightarrow{f_s} a_k \;;\quad y(t) = y(t+\frac{T_0}{a})$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{a}})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jka\omega_0 t}$$

۳-۳-٥- مزدوج گيري

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k$$

$$x^*(t) \xrightarrow{f_s} a^*_{-k}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^*_k\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^*_{-k}\, e^{+jk(\frac{2\pi}{T_0})at}$$

۱) اگر سيگنال حقيقي باشد چون $x(t) = x^*(t)$ پس $a_k = a^*_{-k}$

۲) اگر سيگنال حقيقي و زوج باشد، $a_k = a^*_{-k}$ و $a_k = a_{-k}$ آنگاه ضرايب سري فوريه مطلقا حقيقي و زوج هستند.

۳) اگر سيگنال حقيقي و فرد باشد، $a_k = a^*_{-k}$ و $a_k = -a_{-k}$ آنگاه ضرايب سري فوريه مطلقا موهومي و فرد هستند.

۳-۳-٦- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

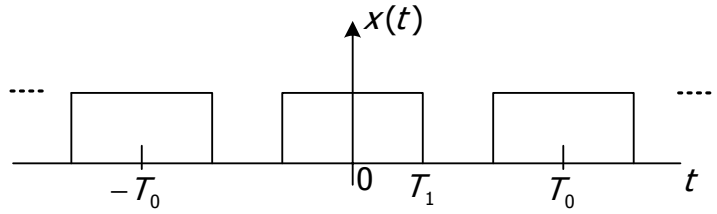
$|a_k|^2$ نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني kام است.

$$< x(t), x(t) > = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot x^*(t)dt$$

مثال ۱) ضرايب سري فوريه شكل مقابل را به دست آوريد.

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir



$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T_0}{2}\end{cases}$$

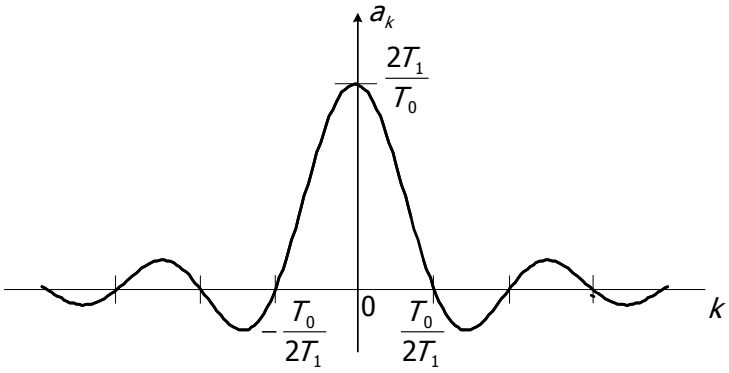
$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}1\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}dt=\frac{1}{T_0}\cdot\frac{-1}{jk\frac{2\pi}{T_0}}e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}\Bigg|_{-T_1}^{T_1}$$

$$=\frac{-1}{jk2\pi}\cdot(e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1}-e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1})=\frac{-1}{jk2\pi}(-2j)\sin(k\frac{2\pi}{T_0}\cdot T_1)$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}$$

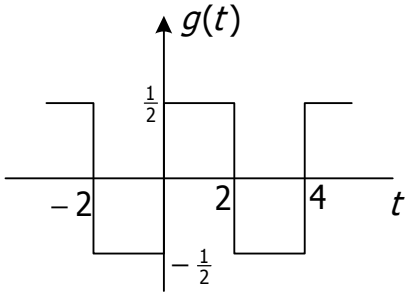
$$\mathrm{sinc}(k)=\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}\Rightarrow a_k=\frac{2T_1}{T_0}\mathrm{sinc}(\frac{2T_1}{T_0}k)$$

با توجه به تعریف :



$$\begin{cases}a)\ T_0=\text{cte},\ T_1\to 0\\ b)\ T_1=\text{cte},\ T_0\to\infty\end{cases}$$

مثال ۲)



$$g(t)=x(t-1)-\frac{1}{2}$$

$$T_0=4\quad,\quad T_1=1$$

$$x(t)\to a_k$$

$$x(t-t_0)\to a_k\,e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}=a_k\,e^{-jk(\frac{2\pi}{4})t}$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

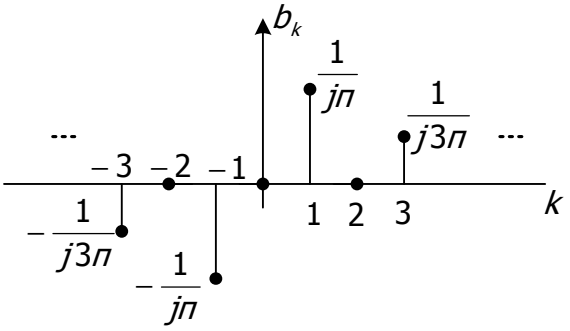
$$e^{jk2\pi}=1 \quad *$$

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t}-\frac{1}{2}$$

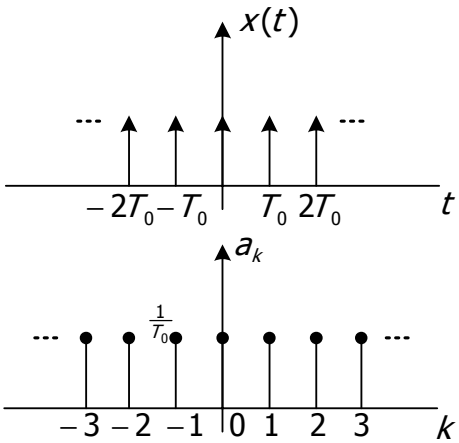
$$\Rightarrow g(t)=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}\cdot e^{jk(\frac{\pi}{2})t}$$

$$b_k=\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cdot e^{-jk}=\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\cdot\left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}}-e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2j}\right)=\frac{1}{2jk\pi}\cdot(1-e^{-jk\pi})=\frac{1}{2jk\pi}\cdot(1-(-1)^k)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b_k=0 & k:even\\ b_k=\dfrac{1}{jk\pi} & k:odd\end{cases}$$



۳-٤- قطار ضربه



$$x(t)=x(t+T_0)$$

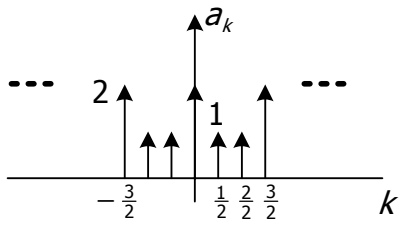
$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)dt=\frac{1}{T_0}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۳)

$$\tilde{x}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{m}{2})+\delta(t-\frac{3m}{2})$$



$$T_0=\frac{3}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\frac{3}{2}}\int_{T_0=\frac{3}{2}}(\delta(t+\frac{1}{2})+2\delta(t)+\delta(t-\frac{1}{2}))e^{-jk\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}t}dt=\frac{2}{3}(2+2\cos(\frac{2\pi}{3}k))=\frac{4}{3}(1+\cos(\frac{2\pi}{3}k))$$

۳-۵- سري فوريه زمان گسسته

$$\varphi[n]=e^{j\Omega n}$$

$$\varphi_k[n]=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}=\cos(k\frac{2\pi}{N}n)+j\sin(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$\frac{2\pi}{k\frac{2\pi}{N}}=\frac{N}{K},(k\in Z)$$

تك تك هارموني‌ها دوره تناوب N دارند:

$$\varphi_k[n]=\varphi_k[n+N]\Rightarrow\varphi_k[n]=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n},\ \varphi_{k+N}[n]=e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n}=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\cdot e^{j2\pi n}$$
$$=\varphi_k[n]\ ,\quad (n\in Z)$$

$$\Rightarrow\varphi_k[n]=\varphi_{k+rN}[n+N],\quad (r\in Z)$$

$$x[n]=x[n+N]$$

$$\Rightarrow x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\ ,\quad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}\Rightarrow a_k=a_{k+rN}\ ,\quad \begin{cases}N\in Z^+\\ r\in Z\\ k\in Z\end{cases}$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

۳-٦- خواص سري فوريه زمان گسسته

۳-٦-۱- تفاضل اول

$$x[n]=x[n+N]\Rightarrow x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$x[n-1]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow y[n]=x[n]-x[n-1]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k(1-e^{-jk(\frac{2\pi}{N})})\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

۳-٦-۲- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$$

مثال ٤) فرض كنيد اطلاعات زير درباره دنباله x[n] داده شده:

الف) $N=6\ ,\ x[n]=x[n+N]$

ب) $\sum_{n=0}^{5}x[n]=2$

ج) $\sum_{n=2}^{7}(-1)^n\ x[n]=1$

در ميان مجموعه سيگنال‌هايي كه در سه شرط بالا صدق مي‌كنند x[n]ائي را پيدا كنيد كه كمترين توان را در هر دوره تناوب دارد.

$$x[n]=\sum_{k=\langle 6\rangle}a_k\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}=\sum_{k=0}^{5}a_k\cdot e^{jk(\frac{\pi}{3})n}\quad ;\quad \{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\ \text{ضرايب}\ \text{مجموعه}$$

$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-jk(\frac{\pi}{3})n}\Rightarrow a_0=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]=\frac{1}{3}$$

$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}\Rightarrow a_3=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}x[n]e^{-jn\pi}=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}(-1)^n\ x[n]=\frac{1}{6}\ ,\quad a_3=a_{-3}=\frac{1}{6}$$

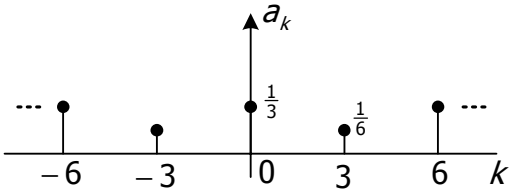
با توجه به رابطه پارسوال، براي احراز آخرين شرط (x[n]ائي كه كمترين توان را در هر دوره تناوب دارد) بايستي ساير ضرايب صفر در نظر گرفته شود ($a_1=a_2=a_4=a_5=0$). بدين ترتيب با توجه به ضرايب a_0 و a_3 بدست آمده مي‌توان سيگنال x[n] را با استفاده از فرمول سنتز بدست آورد.

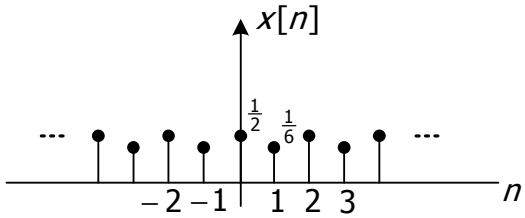
سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

$$x[n]=\sum_{k=0}^{5}a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}e^{j\pi n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-1)^n$$

$$\Rightarrow x[n]=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=0\\ \frac{1}{6} & n=1\\ \frac{1}{2} & n=2\\ \frac{1}{6} & n=3\\ \frac{1}{2} & n=4\\ \frac{1}{6} & n=5\end{cases}$$





سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

۳-۷- سيستم‌هاي LTI و سري فوريه زمان پيوسته

سيستم LTI با ورودي x(t)، خروجي y(t) و پاسخ ضربه h(t) را در نظر مي‌گيريم:

$$x(t) \longrightarrow \overset{LTI}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

پاسخ سيستم را به ورودي نمايي $x(t) = e^{st}$ را در حالت كلي بدست مي‌آوريم:

$$x(t) = e^{st}\Big|_{s=r+j\omega} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

۳-۷-۱- پاسخ سيستم LTI به ورودي نمايي مختلط

الف)

$$s = j\omega \ , \ x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

پس به اين ترتيب خروجي سيستم همان ورودي $x(t) = e^{j\omega t}$ در حاصل‌ضرب پاسخ فركانسي سيستم خواهد بود. پاسخ فركانسي هر سيستم LTI با پاسخ ضربه h(t) از رابطه زير محاسبه مي‌شود.

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

ب)

$$x(t) = x(t+T_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \cdots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \cdots$$

با توجه به خطي بودن سيستم، پاسخ به مجموعه ورودي‌ها برابر مجموع پاسخ‌ها به تك‌تك ورودي‌هاست.

$$\Rightarrow y(t) = \cdots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t}\cdot H(-j\omega_0) + a_0 \cdot H(j0) + a_1 e^{j\omega_0 t}\cdot H(j\omega_0) + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\cdot H(jk\omega_0) \ , \ H(jk\omega_0) = H(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

اگر ورودي به سيستم LTI متناوب و با ضرايب سري فوريه a_k باشند، خروجي سيستم نيز متناوب (با همان دوره تناوب ورودي) $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ خواهد بود. با عبور ورودي متناوب از سيستم مي‌توان برخي از هارموني‌ها را تقويت، تضعيف و يا به طور كامل حذف نمود.

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۱) اگر $x(t)=e^{j2t}$, $y(t)=x(t-3)$ خروجي چه خواهد بود؟

روش اول:

$$x(t)=e^{j2t} \quad , \quad y(t)=x(t-3) \Rightarrow y(t)=e^{j2(t-3)}$$

روش دوم:

$$h(t)=\delta(t-3)\ ,\ H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-3)e^{-j\omega t}dt=e^{-j3\omega}$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{j2t}\cdot H(j\omega)\Big|_{\omega=2}=e^{j2t}\cdot e^{-j6}$$

روش سوم:

$$h(t)=\delta(t-3)\ ,\ x(t)=e^{j2t}$$

$$\Rightarrow y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda-3)e^{+j2(t-\lambda)}dt=e^{j2(t-3)}$$

مثال ۲) اگر $y(t)=x(t-3)\ ,\ x(t)=\cos(4t)+\cos(7t)$ خروجي چه خواهد بود؟

ابتدا سري فوريه ورودي را نوشته و آنگاه سري فوريه خروجي را بدست مي‌آوريم.

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j4t}+\frac{1}{2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{j7t}+\frac{1}{2}e^{-j7t}$$

$$h(t)=\delta(t-3)\Rightarrow H(j\omega)=e^{-j3\omega}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{j4t}H(j4)+\frac{1}{2}e^{-j4t}H(-j4)+\frac{1}{2}e^{j7t}H(j7)+\frac{1}{2}e^{-j7t}H(-j7)$$

$$=\frac{1}{2}e^{j4t}\cdot e^{-j12}+\frac{1}{2}e^{-j4t}\cdot e^{j12}+\frac{1}{2}e^{j7t}\cdot e^{-j21}+\frac{1}{2}e^{-j7t}\cdot e^{j21}$$

$$=\cos(4t-12)+\cos(7t-21)$$

مثال ۳) ورودي $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(2\pi)t}$ با ضرايب سري فوريه $\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=a_{-1}=\frac{1}{4} \\ a_2=a_{-2}=\frac{1}{2} \\ a_3=a_{-3}=\frac{1}{3} \end{cases}$ به سيستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}u(t)$ اعمال مي‌شود. مطلوب است ضرايب سري فوريه خروجي؟

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

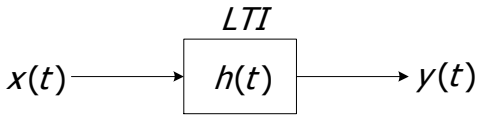
$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+j\omega)t}dt=\frac{-1}{j\omega+1}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$H(jk\omega_0)=H(jk2\pi)=\frac{1}{1+jk2\pi}$$

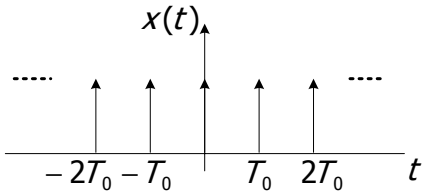
$$b_0=1\times1=1\,,\quad b_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+j2\pi}\,,\quad b_{-1}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-j2\pi}\,,$$

$$b_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}\,,\quad b_{-2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}\,,\quad b_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}\,,\quad b_{-3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}$$

۳-۷-۲- پاسخ سیستمLTI به قطار ضربه



$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t+mT_0)$$



$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{T_0}\quad,\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{T_0}H(jk\omega_0)}_{b_k}e^{jk\omega_0 t}\quad,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

سري فوريه خروجي:

۳-۸- فیلتر کردن (زمان پیوسته)

فيلترهاي شكل‌دهنده فركانسي: شكل طيف سيگنال ورودي را تغيير مي‌دهد.

فيلترهاي انتخاب‌گر فركانسي: بعضي از فركانس ها را اساسا بدون اعوجاج عبور داده و ساير فركانس ها را تضعيف يا حذف مي‌كند. (notch filter)

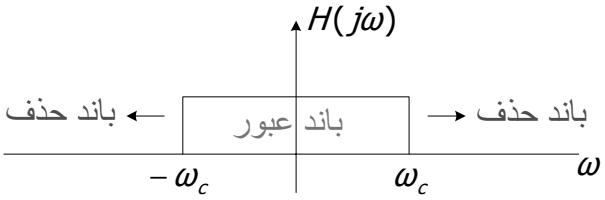
۳-۸-۱- انواع فیلترها

فيلتر پايين گذر (LPF*):

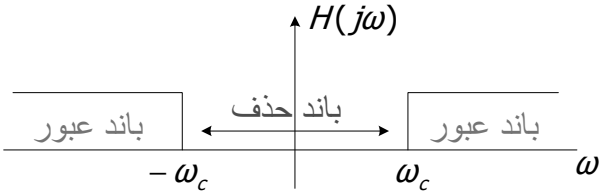
* 1. Low Pass Filter

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

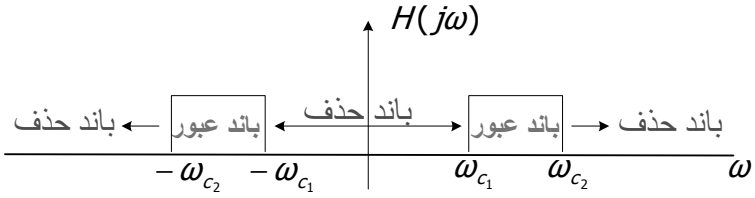
w w w . e l e c . i r



فيلتر بالا گذر (HPF*):



فيلتر ميان گذر (BPF*):



۳-۸-۲- تشخيص نوع فيلتر:

با توجه به داده‌هاي مسئله به دو روش مي‌توان نوع فيلتر را تشخيص داد:

۱) اگر در صورت مسئله پاسخ ضربه سيستم h(t) داده شده باشد، با بدست آوردن $H(j\omega)$ و سپس رسم اندازه پاسخ فركانسي $|H(j\omega)|$ به ازاي فركانس‌هاي مختلف، نوع فيلتر را تشخيص مي‌دهيم.

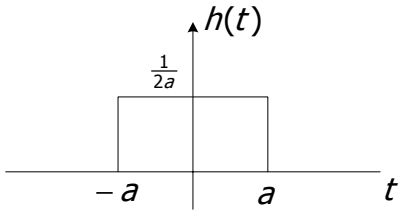
۲- اگر در صورت مسئله معادله ديفرانسيل سيستم LTI داده شده باشد، ابتدا با اعمال تابع $x(t) = e^{j\omega t}$ بعنوان ورودي سيستم، $H(j\omega)$ را با توجه به رابطه $y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$ بدست مي‌آوريم. سپس اندازه پاسخ فركانسي سيستم $|H(j\omega)|$ را ترسيم مي‌كنيم تا نوع فيلتر را تشخيص دهيم.

مثال ٤: پاسخ ضربه سيستم $h(t) = \frac{1}{2a} rect(\frac{t}{2a})$ داده شده است. سيستم LTI مذكور بمانند چه نوع فيلتري عمل مي‌كند؟

2. High Pass Filter

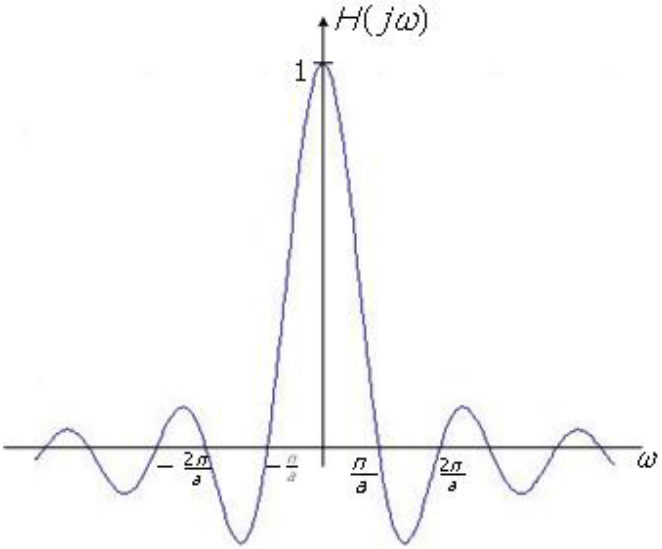
3. Band Pass Filter

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



$$H(j\omega)=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{-j\omega t}dt=\frac{-1}{j2a\omega}(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})=\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}=\frac{\sin(\frac{a\omega}{\pi}\pi)}{\frac{a\omega}{\pi}\pi}$$

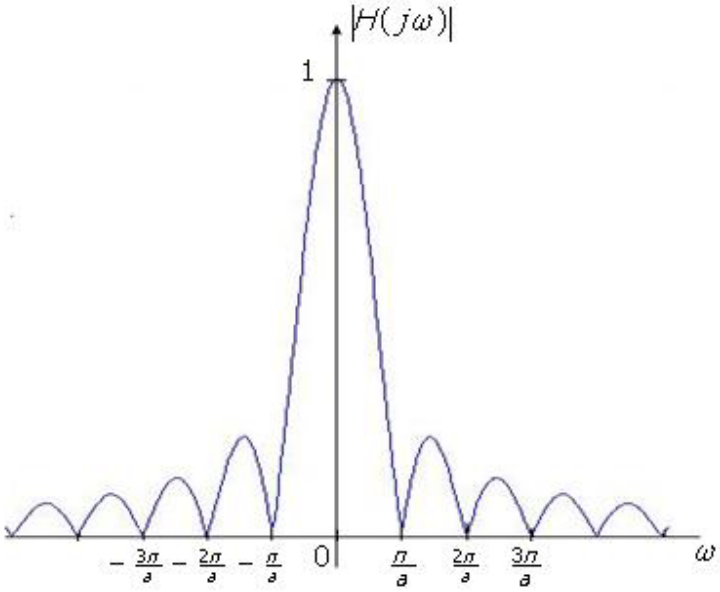
$$=\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot a)\,;\quad \frac{\omega}{\pi}\cdot a=m\,,\ \ m\in Z$$



براي تشخيص نوع فيلتر بايستي $|H(j\omega)|$ را ترسيم نمائيم.

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r



که با توجه به اندازه پاسخ فركانسي سيستم نوع فيلتر، فيلتر پايين گذر LPF غيرايده‌آل است چون نزديك صفر بيشترين دامنه را دارد و با افزايش فركانس اندازه پاسخ فركانسي بشدت كاهش و به سمت صفر ميل مي‌كند.

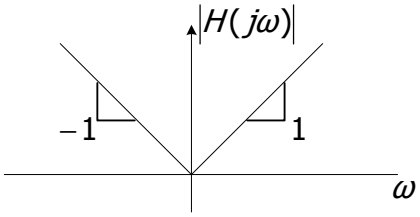
مثال ٥: اگر $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}\ ,\ x(t)=e^{j\omega t}$ نوع فيلتر را تعيين كنيد.

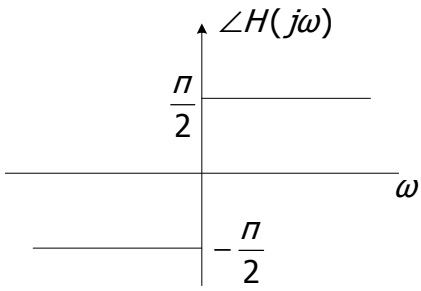
$$x(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow y(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

X(t) و y(t) را در رابطه داده شده براي سيستم LTI جايگذاري مي‌كنيم تا پاسخ فركانسي سيستم را بدست آوريم.

$$e^{j\omega t}H(j\omega)=j\omega\, e^{j\omega t}\Rightarrow H(j\omega)=j\omega$$

$$\angle H(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}; & \omega>0\\ -\dfrac{\pi}{2}; & \omega<0\end{cases}\qquad ,\qquad |H(j\omega)|=|\omega|$$





با توجه به اندازه پاسخ فركانسي سيستم نوع فيلتر بالاگذر HPF است.

مثال ٦) اگر $y'(t)+2y(t)=\cos 3t$ مطلوبست:

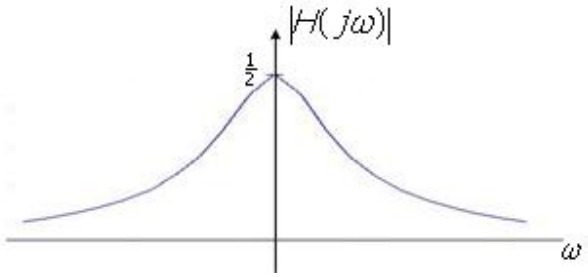
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

الف) اين سيستم به عنوان چه فيلتري عمل مي‌كند.

ب) سري فوريه خروجي را با توجه به ورودي داده شده به دست آوريد.

حل الف:

$$y'(t)+2y(t)=x(t);\quad x(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow y(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$
$$j\omega\, e^{j\omega t}H(j\omega)+2e^{j\omega t}H(j\omega)=e^{j\omega t};$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\quad,\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

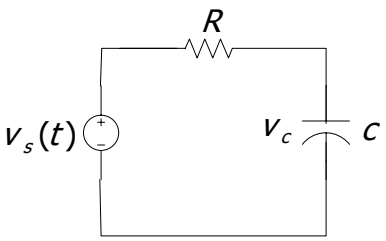


با توجه به شكل نوع فيلتر پايين‌گذر LPF است.

حل ب:

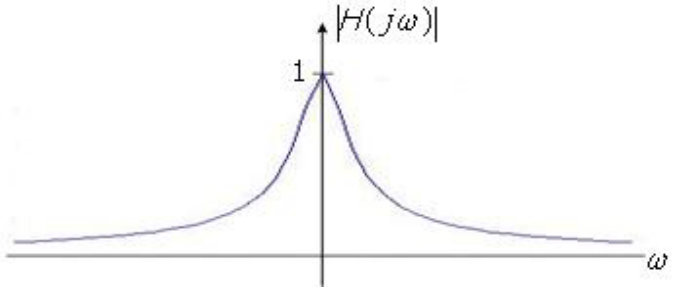
$$x(t)=\cos 3t=\frac{1}{2}e^{j3t}+\frac{1}{2}e^{-j3t}\quad ;\omega_0=3$$
$$b_1=\frac{1}{2}H(j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}\ ,\ b_{-1}=\frac{1}{2}H(-j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}$$
$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}e^{-j3t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{j56.3}}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{-j56.3}}e^{-j3t}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\cos(3t-56.3)$$

مثال ۷) $H(j\omega)$ و نوع فيلتر را تعيين كنيد.



$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)\ ;\quad v_s(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow v_c(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$
$$\Rightarrow RC(j\omega)e^{j\omega t}H(j\omega)+e^{j\omega t}H(j\omega)=e^{j\omega t}$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{RC(j\omega)+1}\ ;\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

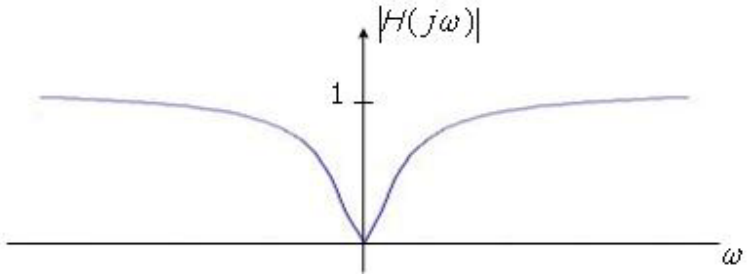


حال اگر خروجي دو سر مقاومت باشد:

$$\frac{dv_R(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_R(t)=\frac{dv_s(t)}{dt}\ ;\quad v_s(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow v_R(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

$$\Rightarrow j\omega\, e^{j\omega t}+\frac{1}{RC}e^{j\omega t}H(j\omega)=j\omega\, e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{\frac{1}{RC}+j\omega}\ ;\quad |H(j\omega)|=\frac{|\omega|}{\sqrt{(\frac{1}{RC})^2+\omega^2}}$$



تذكر: همانطوريكه ملاحظه مي‌شود بسته به اينكه خروجي در سر خازن و يا مقاومت در نظر گرفته شود نوع فيلترينگ از پايين‌گذر به بالاگذر تغيير مي‌كند.

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۳-۹- سيستم‌هاي LTI و سري فوريه زمان گسسته

الف)

$$x[n]=Z^n \Rightarrow y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} Z^{n-m}\cdot h[m]=Z^n\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]Z^{-m}=Z^n\cdot H(z)$$

$$;\ H(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]Z^{-n}$$

ب)

$$Z=e^{j\Omega};\ x[n]=e^{j\Omega n}\Rightarrow y[n]=e^{jn\Omega}\cdot H(e^{j\Omega});\ H(e^{j\Omega})\overset{\Delta}{=}H(j\Omega)\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

ج)

$$x[n]=x[n+N]\quad ;\quad x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=<N>} b_k\cdot H(jk\frac{2\pi}{N})\quad ;\ H(jk\frac{2\pi}{N})\overset{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

تذكر: در مورد سيستم زمان گسسته و LTI با ورودي متناوب، خروجي نيز متناوب خواهد بود. دوره تناوب خروجي و ورودي يكسان بوده و ضرايب سري فوريه خروجي از رابطه داده شده در بند ۳ بدست مي‌آيد.

يادآوري (سري هندسي):

الف)

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases} N & ,\alpha=1\\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ,\alpha\neq 1\end{cases}$$

ب)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}\quad ,\quad |\alpha|<1$$

ج)

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\quad ,\quad |\alpha|<1$$

د)

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n=\frac{\alpha^k}{1-\alpha}\quad ,\quad |\alpha|<1$$

تمرين :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\cos(\frac{\pi}{2}n)\overset{?}{=}\frac{4}{5}$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۱) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\alpha^n u[n]$ داده شده است. پاسخ y[n] را به ورودي $x[n]=\cos(\frac{2\pi}{N}n)$ بدست آورید.

$$x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

با توجه به خطي بودن سيستم، پاسخ به تك‌تك ورودي‌هاي نمايي مختلط طبق بند ۲ را بدست آورده و با يكديگر جمع مي‌كنيم تا پاسخ كلي سيستم به ورودي مذكور تعيين شود.

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n u[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-j\Omega})^n=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

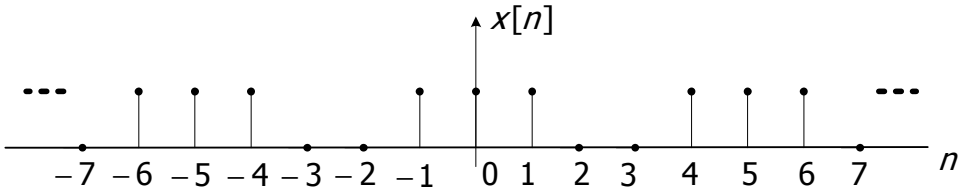
$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}\quad,\quad b_{-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

مثال ۲) سیستم LTI با پاسخ ضربه h[n] و ورودي متناوب x[n] داده شده است. سري فوريه خروجي را بدست آوريد.

$$h[n]=(\frac{1}{2})^{|n|}\quad,\quad x[n]=\begin{cases}1 & n=0,\pm1\\ 0 & n=\pm2,\pm3\end{cases}\quad ;N=6$$



$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{6}(e^{-jk\frac{2\pi}{6}(-1)}+1+e^{-jk\frac{2\pi}{6}(1)})=\frac{1}{6}(1+2\cos(k\frac{\pi}{3}))$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

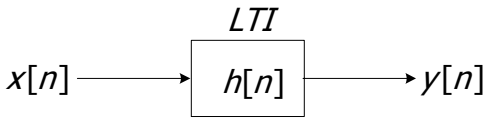
$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^{|n|}\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2}\cdot e^{j\Omega})^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{j\Omega})^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{n}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega)=\frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1-\cos(\Omega)+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5-4\cos(\Omega)}$$

$$H(jk\frac{2\pi}{6})=\frac{3}{5-4\cos(k\frac{\pi}{3})}\Rightarrow y[n]=\sum_{k=<6>}\frac{1}{6}(1+2\cos(k\frac{\pi}{3}))\cdot H(jk\frac{\pi}{3})e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

۳-۱۰- فیلتر کردن (زمان گسسته)



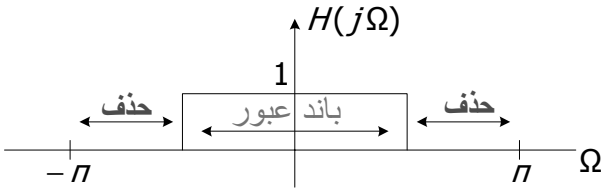
$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\Omega n}$$

$H(j\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است پس مي‌توان نوشت: $H(j\Omega)=H(j(\Omega+2\pi))$

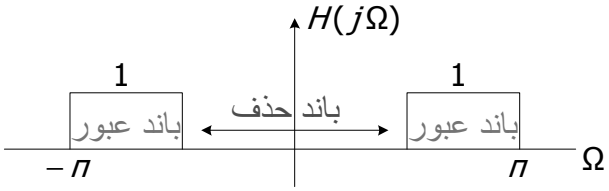
بدين ترتيب براي تشخيص نوع فيلتر در سيستم‌هاي زمان گسسته به اندازه پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi,\pi]$ توجه شود.

۳-۱۰-۱- انواع فیلترها

فیلتر پائین‌گذر (LPF*):



فیلتر بالاگذر (HPF*):



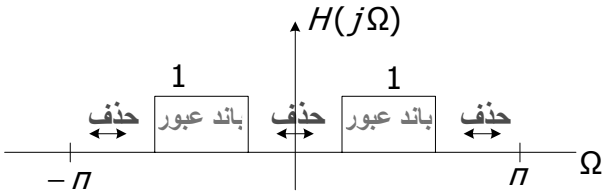
* 1. Low Pass Filter

2. High Pass Filter

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

w w w . e l e c . i r

فیلتر میان‌گذر (BPF*):



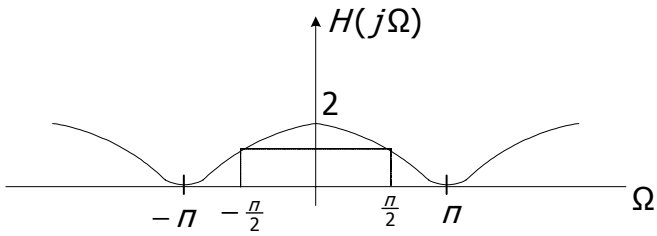
مثال ۳) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$، پاسخ فرکانسي $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n]=\frac{1}{2}x[n+1]+x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$$

$$h[n]=y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n]=\frac{1}{2}\delta[n+1]+\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\delta[n+1]+\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\right)e^{-j\Omega n}=\frac{1}{2}e^{j\Omega}+1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}=1+\cos(\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\begin{cases}0 & \Omega=-\pi\\ 1 & \Omega=-\frac{\pi}{2}\\ 2 & \Omega=0\\ 1 & \Omega=\frac{\pi}{2}\\ 0 & \Omega=\pi\end{cases}$$



با توجه به $H(j\Omega)$ در بازه $[-\pi,\pi]$ (چون همواره مثبت است لذا با $|H(j\Omega)|$ برابر خواهد بود) نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.

مثال ٤) درسیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ فرکانسي $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n]=-\frac{1}{2}x[n+2]+x[n]-\frac{1}{2}x[n-2]$$

از آنجايي که h[n] در مسئله خواسته شده است، طبق بند ۲ مستقیما $H(j\Omega)$ را بدست مي‌آوریم.

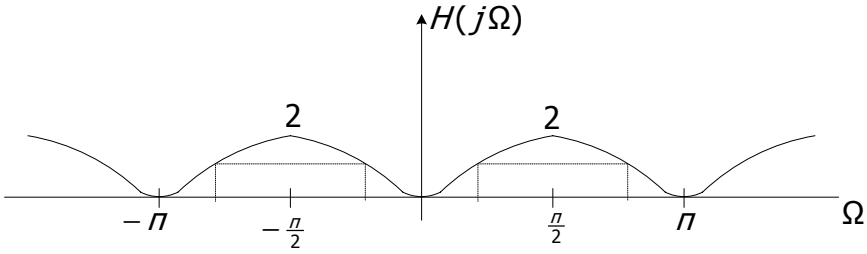
3. Band Pass Filter

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

$$x[n]=e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n]=e^{j\Omega n}H(j\Omega)$$
$$e^{j\Omega n}H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n+2)}+e^{j\Omega n}-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n-2)}$$
$$\Rightarrow H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j2\Omega}+1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega 2}=1-\cos(2\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\begin{cases}0 & \Omega=0\\ 1 & \Omega=\pm\frac{\pi}{4}\\ 2 & \Omega=\pm\frac{\pi}{2}\\ 1 & \Omega=\pm\frac{3\pi}{2}\\ 0 & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



با در نظر گرفتن پاسخ فرکانسي در بازه $[-\pi,\pi]$ نوع فيلتر ميان‌گذر BPF است.

مثال ٥) سيستم LTI و علي با معادله تفاضلي زير داده شده است.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})x[n-k]$$

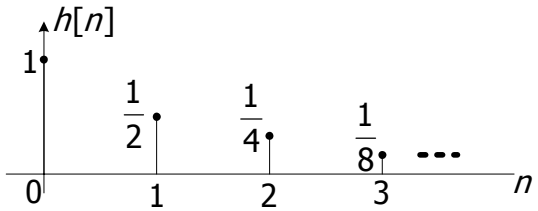
مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه h[n] ؟

ب)پاسخ فرکانسي $H(j\Omega)$؟

ج) نوع فيلتر ؟

$$h[n]=y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})\,\delta[n-k]=\delta[n]+2^{-1}\delta[n-1]+2^{-2}\delta[n-2]+\cdots$$



$$H(j\Omega)=1+2^{-1}e^{-j\Omega}+2^{-2}e^{-j2\Omega}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\cdot e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

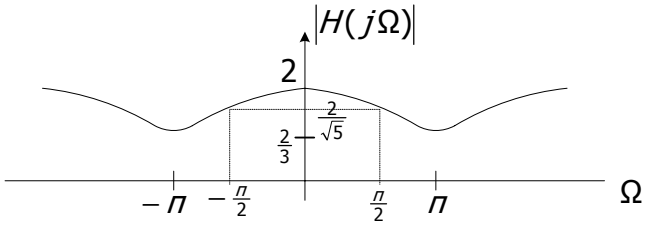
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

$$\Rightarrow H(j\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos\Omega+j\frac{1}{2}\sin\Omega}$$

$$|H(j\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\cos\Omega)^2+(\frac{1}{2}\sin\Omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}-\cos(\Omega)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos(\Omega)}}$$

$$|H(j\Omega)|=\begin{cases}2 & \Omega=0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \Omega=\pm\frac{\pi}{2}\\ \frac{2}{3} & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



با در نظر گرفتن اندازه پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi,\pi]$، از آنجايي كه با افزايش فركانس ميزان تضعيف با توجه به شكل زياد مي‌شود، نوع فيلتر را مي‌توان پايين‌گذر LPF دانست.

۳-۱۱- خلاصه

اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t)=f(t+T)$ تابع $G(t)=f(f(t))$ نيز پريوديك با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلي تابع f(t) باشد، در اين صورت دوره تناوب اصلي G(t) لزوما T نيست.

اگر سيگنال در طي يك دوره تناوب (T) فرموله شود (f(t))، با توجه به رابطه گفته شده سيگنال متناوب در كل زمان‌ها بيان مي‌شود $(\tilde{f}(t))$.

سري فوريه، تنها براي توابع متناوب بيان مي‌شود، توابعي كه داراي دوره تناوب اصلي $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$, $x(t)=x(t+T)$ مي‌باشند.

در صورتي كه بتوان سيگنال را به صورت مجموعه‌اي از هارموني‌ها بسط داد، مي‌توان به اين سوال كه در يك سيگنال چه فركانس‌هايي و با چه قدرتي وجود دارند را پاسخ داد.)

پاسخ سيستم LTI به نمايي مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ يا به طور كلي $e^{j\omega t}$ به فرم بسيار ساده‌اي تعريف مي‌شود.

هرچه هارموني‌ها بالاتر باشد فركانس‌ها بالاتر است و برعكس هر چه هارموني‌ها پايين‌تر باشد فركانس‌ها پايين‌تر است.

اگر سيگنالي در هارموني‌هاي بالا ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس بالا است و برعكس اگر سيگنالي در هارموني‌هاي پايين ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس پايين است.

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

به شرط برقرار بودن شرايط ديريكله همگرايي سري فوريه قابل بررسي است.

مجوعه ضرايب $\{a_k\}$ را ضرايب سري فوريه يا ضرايب طيفي x(t) مي‌نامند. اين ضرايب در حالت كلي مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني متناظر است. ضريب a_0 مؤلفه DC يا ثابت سيگنال است.

با دانستن خواص سري فوريه، در برخي مسائل براي پيدا كردن ضرايب سري فوريه لزومي به استفاده از تعريف گفته شده براي سري فوريه نيست.

اگر ورودي ضرايب فوريه a_k باشند، خروجي $b_k e^{jkw_0}$ مي‌باشد. مي‌توان تعدادي از ورودي‌ها را از خروجي حذف كرد.

اگر سيستم ورودي سيستم LTI متناوب باشد، خروجي نيز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود.

با توجه به ورودي و خروجي سيستم مي‌توان نوع فيلتر و شكل آن را بدست آورد.

amir javedani malak

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

فصل چهارم

تبديل فوريه سيستم‌هاي زمان پيوسته

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

٤-١- تعریف تبدیل فوریه زمان پیوسته

$$f(t) \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\leftrightarrow}} F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad , \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad ; \quad \omega = 2\pi f$$

٤-٢- شرایط وجود تبدیل فوریه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

١- سیگنال مطلقا انتگرال باشد.

٢- در طول هر بازه محدود سیگنال تعداد محدودي Max یا Min داشته باشد.

٣- در طول هر بازه محدود سیگنال تعداد محدودي ناپیوستگي داشته باشد.

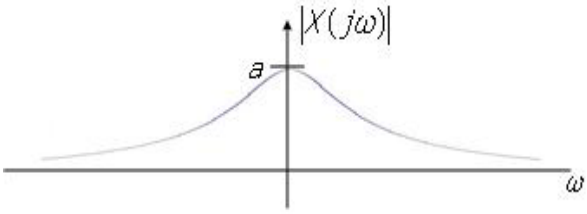
مثال ١) تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-at} u(t) \, , \, a > 0$ ، را بدست آورده و اندازه و فاز آن را بدست آورده و ترسیم نمائید.

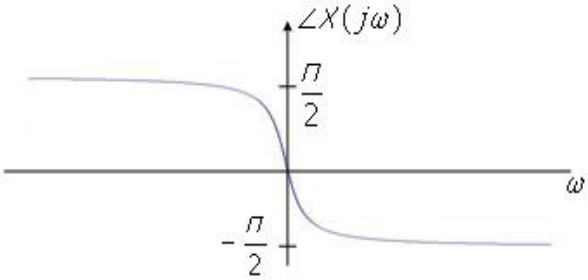
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{j\angle X(j\omega)};$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \quad , \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

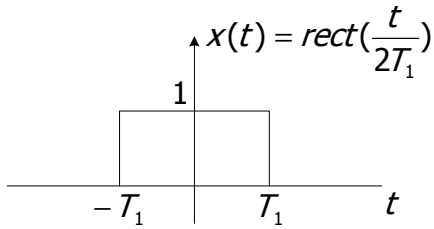
$$|X(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} & , \quad \omega = 0 \\ 0 & , \quad \omega = \pm\infty \end{cases} \qquad \angle X(j\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega = 0 \\ \mp\frac{\pi}{2} & , \quad \omega = \pm\infty \end{cases}$$





مثال ٢) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

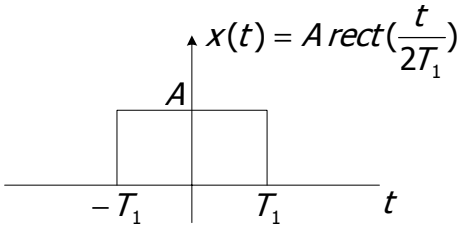


$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = -\frac{1}{j\omega}(e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega T_1 \cdot \frac{1}{T_1}}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 2T_1 \frac{\sin(\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi})}{\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 \,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1)$$

یادآوري: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

تذكر: در حالت كلي اگر سيگنال پالسي به فرم زير باشد آنگاه:



$X(j\omega) =$ سطح پالس$\times$sinc($\frac{\omega}{\pi} \times$ (نصف عرض پالس) $= 2T_1 A \times \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1)$

٤-٣- خواص تبديل فوريه

٤-٣-١- خطي بودن

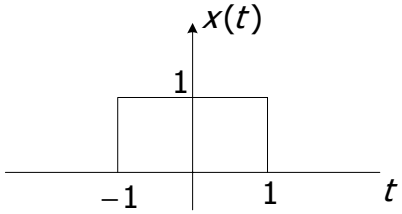
$$\begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega) \end{cases} \Rightarrow af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$$

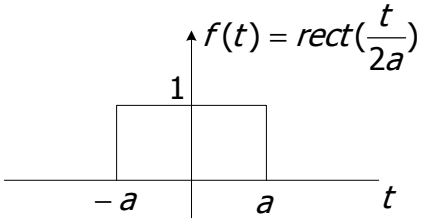
٤-٣-٢- تغيير مقياس زماني

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(j\frac{\omega}{a})$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۳) به كمك خواص، تبديل فوريه سيگنال زير را بدست آوريد.





مي‌دانيم:

$$F(j\omega) = 2a\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot a)$$

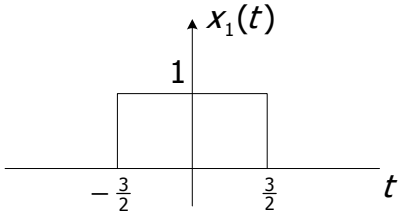
$$x(t) = f(at) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a}) = \frac{2a}{|a|}\mathrm{sinc}(\frac{\frac{\omega}{a}}{\pi}\cdot a) = 2\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})$$

٤-۳-۳- شيفت زماني

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

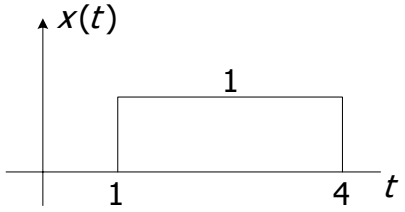
مثال ٤) تبديل فوريه تابع $x(t) = rect(\frac{t-2.5}{3})$ را به دست آوريد.

۱) $$x_1(t) = rect(\frac{t}{3}) \Rightarrow X_1(j\omega) = 3\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$$



۲) $$x(t) = x_1(t-2.5) \Rightarrow X(j\omega) = e^{-j2.5\omega}\cdot X_1(j\omega) = e^{-j2.5\omega}\times 3\sin(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



٤-٣-٤- شيفت فركانسي

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(j(\omega-\omega_0))$$

مثال ٥) عكس تبديل فوريه را بدست آوريد.

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = 1$$

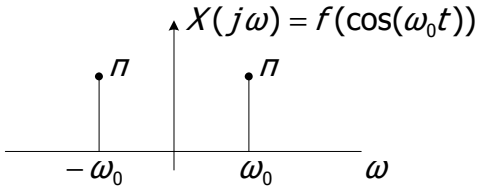
$$\begin{cases}\delta(t) \leftrightarrow 1\\ 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)\end{cases}$$

تذكر: تبديل فوريه نمايي مختلط $e^{\pm j\omega_0 t}$ را نمي‌توان مستقيما محاسبه نمود. با توجه به دو رابطه بدست آمده در بالا و با استفاده از خاصيت شيفت فركانسي تبديل فوريه اين توابع را محاسبه مي‌كنيم:

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{j\omega_0 t}\times 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\\ e^{-j\omega_0 t}\times 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{f} \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

بنابراين تابع $\cos\omega_0 t$ جزو توابعي است كه به كمك خواص، تبديل فوريه‌اش بدست مي‌آيد. سيگنال $x(t) = \cos\omega_0 t$ مطلقا حقيقي و زوج است، همانطوريكه در شكل مشاهده مي‌شود تبديل فوريه آن نيز مطلقا حقيقي و زوج مي‌باشد.

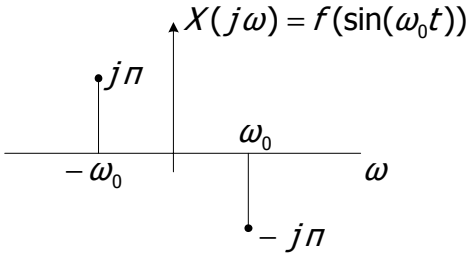


با همان منطق دنبال شده در بالا مي‌توان تبديل فوريه تابع $x(t) = \sin\omega_0 t$ را نيز بدست آورد.

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$
$$= -\pi j\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi j\,\delta(\omega+\omega_0)$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

سيگنال $x(t) = \sin \omega_0 t$ مطلقا حقيقي و فرد است. تبديل فوريه اين سيگنال همانطوريكه در شكل نيز مشاهده مي‌شود مطلقا موهومي و فرد مي‌باشد.



سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

٤-٣-٥- مدولاسیون

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega+\omega_0))$$

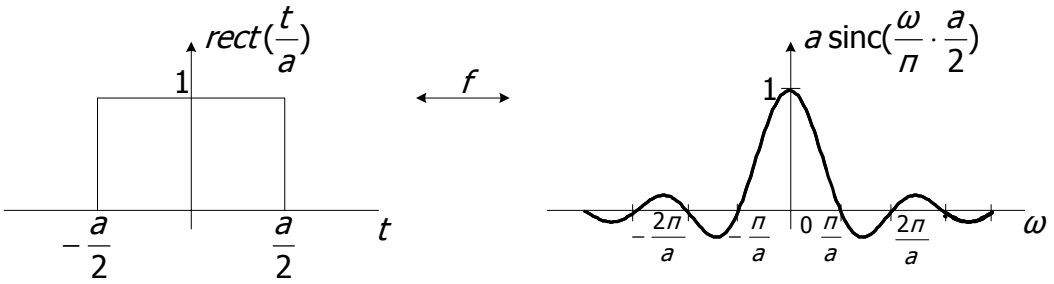
اثبات :

$$f(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega+\omega_0))$$

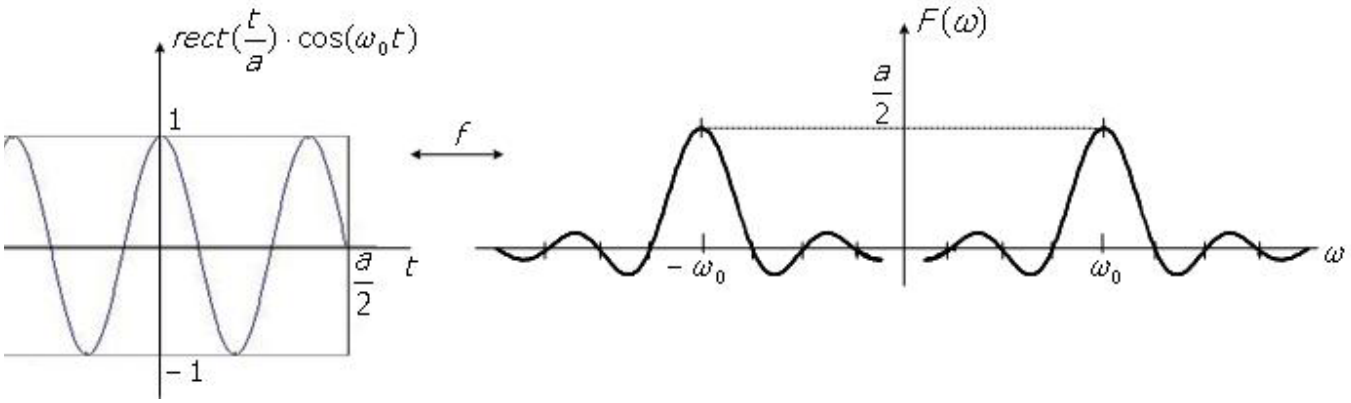
مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید؟

$$rect(\frac{t}{a})\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow ?$$

$$rect(\frac{t}{a}) \leftrightarrow a\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{a}{2})$$



$$\Rightarrow rect(\frac{t}{a})\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{a}{2}\mathrm{sinc}(\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2}) + \frac{a}{2}\mathrm{sinc}(\frac{\omega+\omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2})$$



٤-٣-٦- مشتق فرکانسي

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

٤-٣-٧- مشتق زماني

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

٤-٣-٨- مزدوجگيري (تقارن مزدوج)

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$
$$f^*(t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

تذكر:

$f(t)$ سيگنال حقيقي و زوج $\Leftarrow$ $F(j\omega)$ مطلقا حقيقي و زوج خواهد بود.

$f(t)$ سيگنال حقيقي و فرد $\Leftarrow$ $F(j\omega)$ مطلقا موهومي و فرد خواهد بود.

٤-٣-٩- خاصيت دوگاني

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \qquad\qquad f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$
$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad \text{يا} \quad F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

مثال ٢) تبديل فوريه سيگنال $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ را به كمك خواص بدست آوريد.

$$f(t) = e^{a|t|} \Rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$$
$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

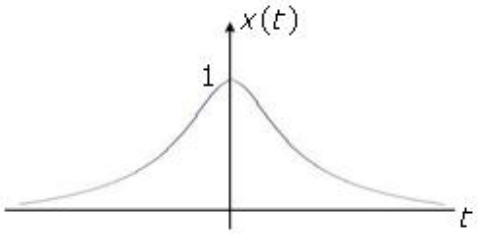
$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2} \overset{\text{دوگاني}}{\Longrightarrow} \frac{2a}{a^2+t^2} \to 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

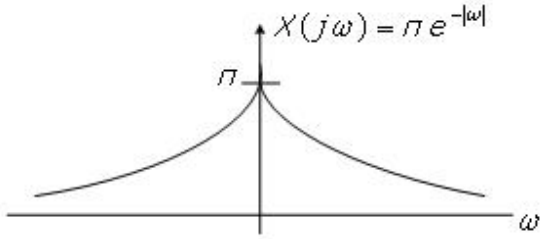
بنابراين $\dfrac{2a}{a^2+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$

پارامتر a=1 را در نظر مي‌گيريم:

$$\frac{2}{1+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1+t^2} \leftrightarrow X(j\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

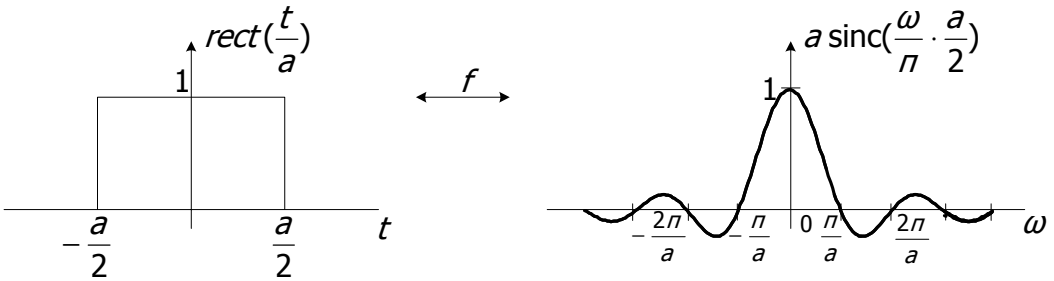
سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM





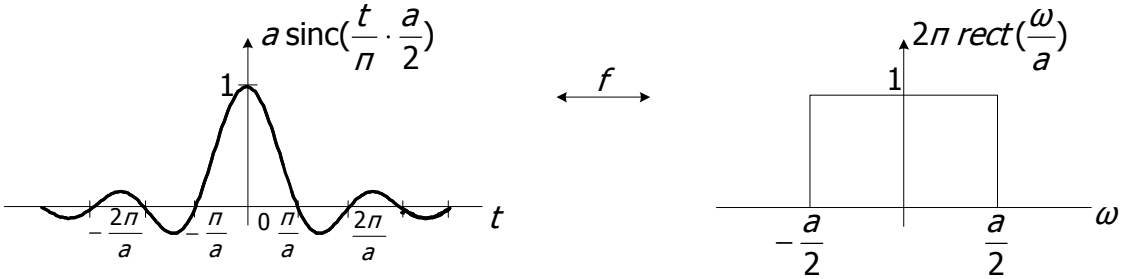
مثال ۳) تبدیل فوریه سیگنال زیر را به کمك خواص بدست آورید.

$$x(t) = a\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\frac{a}{2}) \leftrightarrow ?$$



$$a\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\frac{a}{2}) \leftrightarrow 2\pi\, rect(-\frac{\omega}{a}) = 2\pi\, rect(\frac{\omega}{a})$$

$$x(t) = a\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\frac{a}{2}) \leftrightarrow 2\pi\, rect(-\frac{\omega}{a}) = 2\pi\, rect(\frac{\omega}{a})$$



۴-۳-۱۰- ضرب و کانولوشن

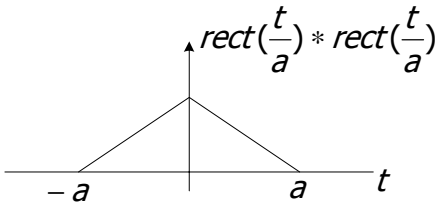
$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$$

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

مثال ٤)

$$rect(\frac{t}{a}) * rect(\frac{t}{a}) \leftrightarrow ?$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



$$rect(\frac{t}{a}) * rect(\frac{t}{a}) \leftrightarrow a^2 \text{sinc}^2(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{a}{2})$$

٤-٣-١١- انتگرال

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(j0)\delta(\omega)$$

اثبات:

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda \leftrightarrow F(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

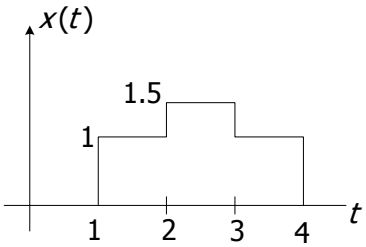
$$u(t) \leftrightarrow U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

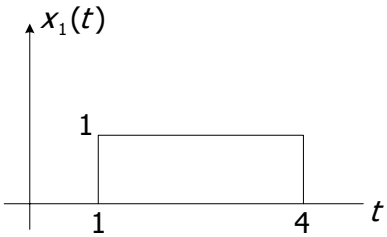
$$F(j\omega)U(j\omega) = \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi\delta(\omega) \cdot F(j\omega)$$

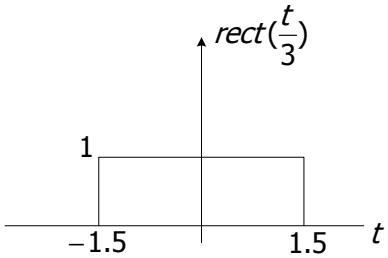
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \cdot F(j0)$$

مثال ٥) سیگنال x(t) در ذیل ترسیم شده است. تبدیل فوریه آن را بدست آورید.

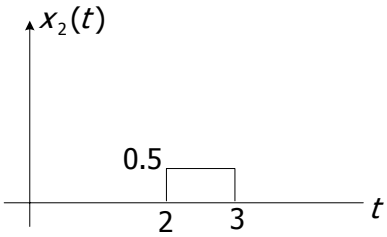
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

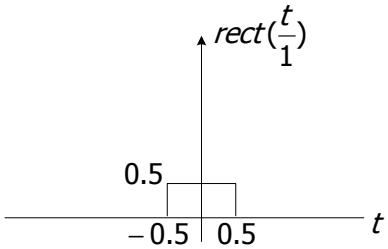






$$rect(\frac{t}{3}) \leftrightarrow 3\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$$





$$rect(\frac{t}{1}) \leftrightarrow 0.5\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{1}{2})$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$$

$$x_1(t) = rect(\frac{t-2.5}{3}) \leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)}\cdot 3\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$$

$$x_2(t) = rect(\frac{t-2.5}{1}) \leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)}\cdot 0.5\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{1}{2})$$

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega(2.5)}(3\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{1}{2}))$$

٤-٣-١٢- رابطه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)d\omega$$

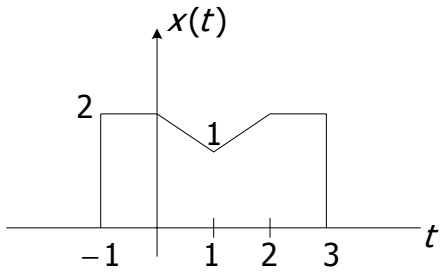
اگر توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ يكسان در نظر گرفته شوند، رابطه پارسوال به فرم ساده‌تري بيان مي‌شود.

$$f(t) = f_1(t) = f_2(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(j\omega)\|^2 d\omega$$

مثال ٦) سيگنال x(t) به صورت زير است.

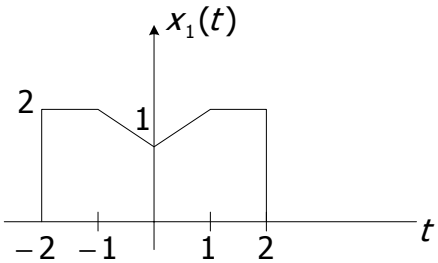
اگر تبديل فوريه آن $X(j\omega)$ باشد، بدون انجام محاسبات صريح مطلوبست:

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM



الف) $\angle X(j\omega)$ ب) $X(j0)$ ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$ د) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

حل الف: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ چون $x_1(t)$ حقيقي و زوج است، $X_1(j\omega)$ نيز مطلقا حقيقي و زوج خواهد بود. به عبارت ديگر: $\angle X_1(j\omega) = 0$



$x(t) = x_1(t-1)$ يا $x_1(t) = x(t+1)$

$$x(t) = x_1(t-1) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega} \cdot X_1(j\omega) \Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega + \angle X_1(j\omega)$$
$$\Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega$$

حل ب:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

چون سطح زير منحني x(t) با سطح زير منحني $x_1(t)$ برابر است و با توجه به تعريف تابع زوج داريم:

$$X(j0) = 2(\int_0^1 (\text{معادله خط})\ dt + \int_1^2 2dt) = 7$$

حل ج:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

حل د: رابطه پارسوال مورد نظر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

٤-٤- تبديل فوريه سيگنال متناوب

اگر سيگنالي متناوب باشد به اين معني است كه داراي سري فوريه است. تبديل فوريه سيگنال متناوب را به طور مستقيم محاسبه نمي‌كنيم. ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده، سپس از سري فوريه تبديل فوريه را به دست مي‌آوريم.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \qquad , \quad x(t)=x(t+T_0)$$

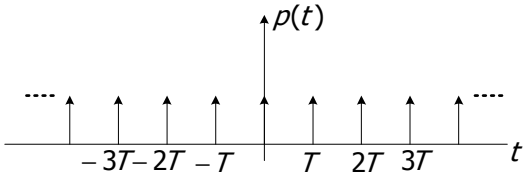
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \xrightarrow{f} X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T_0})$$

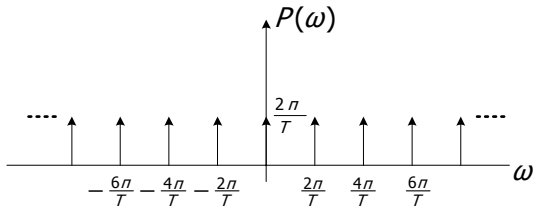
مهمترين سيگنال متناوبي كه مي‌شناسيم قطار ضربه است.

$$p(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$$

ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده:

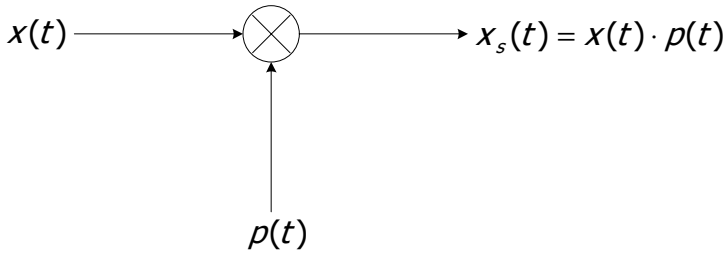
$$a_k=\frac{1}{T};\ p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \leftrightarrow P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$





٤-٥- تئوري نمونه‌برداري سيگنال

در اين روش سيگنال x(t) در قطار ضربه ضرب مي‌شود كه با توجه به خواص بيان شده براي تبديل فوريه، تبديل فوريه حاصلضرب دو تابع برابر با كانولوشن آنهاست.



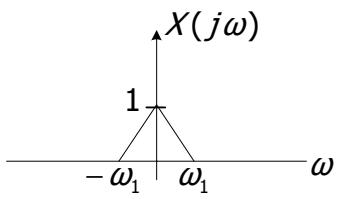
سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

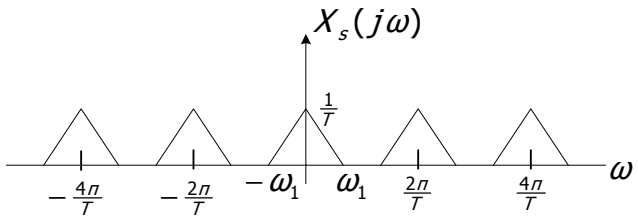
$$x_s(t) = x(t)\cdot p(t) \leftrightarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \leftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

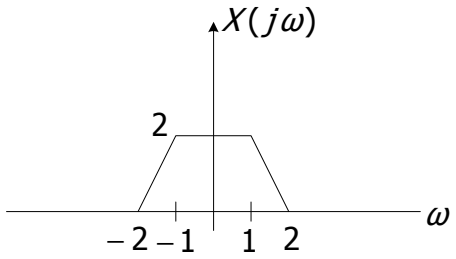
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * (\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

رابطه بدست آمده بيان مي‌كند كه در اثر نمونه‌برداري از سيگنال، تبديل فوريه سيگنال نمونه‌برداري شده $x_s(t)$ برابر تبديل فوريه سيگنال اوليه $X(j\omega)$ خواهد بود كه البته در فواصل $\frac{2\pi}{T}$ عينا تكرار شده و دامنه آن نيز در $\frac{1}{T}$ ضرب شده است.



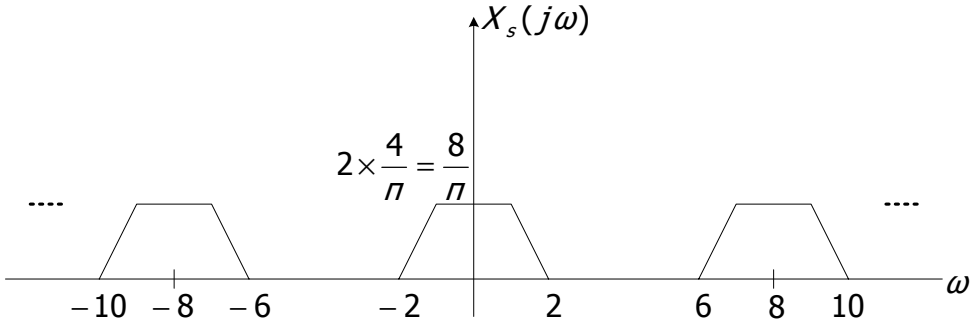


مثال ۷) مطلوب است $X_s(j\omega)$، اگر $X(j\omega)$ به صورت مقابل باشد.



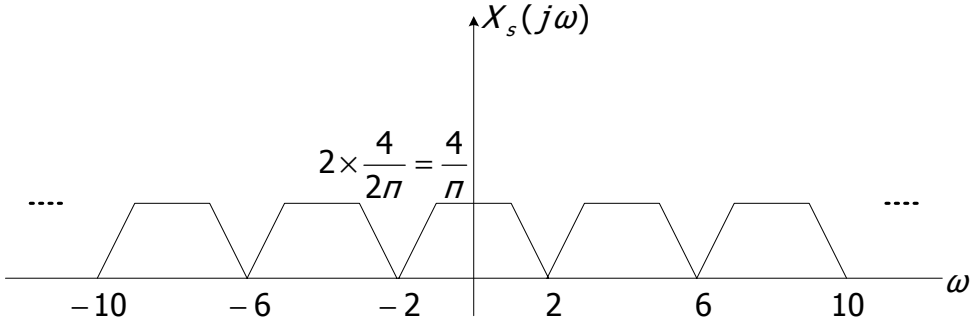
الف) $T = \frac{\pi}{4}$ ب) $T = \frac{\pi}{2}$ ج) $T = \frac{2\pi}{3}$

حل الف: $\frac{2\pi}{T} = 8$

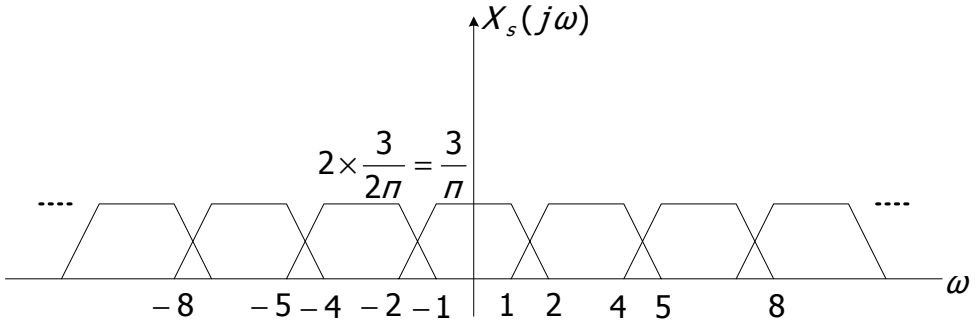


سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

حل ب: $\frac{2\pi}{T} = 4$



حل ج: $\frac{2\pi}{T} = 3$



٤-٦- خلاصه

قبل از بدست آوردن تبديل فوريه با استفاده از بايد شرايط وجود تبديل فوريه (ديريكله) را بررسي كرد.

در تبديل فوريه نيز با توجه به اندازه و فاز مي‌توان نوع فيلتر را تشخيص داد.

با دانستن خواص تبديل فوريه، برخي مسائل به روش ساده‌تري قابل حل است.

تابع $\cos\omega_0 t$ جزو توابعي است كه به كمك خواص، تبديل فوريه‌اش بدست مي‌آيد و با توجه به شكل حاصل، تبديل فوريه آن مطلقا حقيقي و زوج است. همچنين با توجه به شكل بدست آمده براي $\sin\omega_0 t$، تبديل فوريه آن مطلقا موهومي و فرد است.

اگر f(t) سيگنالي زوج و حقيقي باشد، $F(j\omega)$ مطلقا حقيقي و زوج و همچنين اگر f(t) سيگنالي فرد و حقيقي باشد، $F(j\omega)$ مطلقا موهومي و فرد است.

اگر سيگنالي متناوب باشد به اين معني است كه داراي سري فوريه است. تبديل فوريه سيگنال متناوب را به طور مستقيم محاسبه نمي‌كنيم. ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده، سپس از سري فوريه تبديل فوريه را به دست مي‌آوريم.

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www.elec.ir

مهمترين سيگنال متناوبي كه مي‌شناسيم قطار ضربه است.

در نمونه‌برداري سيگنال، تابع x(t) در قطار ضربه ضرب مي‌شود. با توجه به خواص بيان شده براي تبديل فوريه، تبديل فوريه حاصلضرب دو تابع برابر با كانولوشن آنهاست.

amir javedani malak

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www elec ir

فصل پنجم

تبديل فوريه سيستم‌هاي زمان گسسته

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۵-۱- تعریف تبدیل فوریه زمان گسسته

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \quad , \quad X(j\Omega) = X(j(\Omega + 2k\pi)) = X(j(\Omega + 2\pi))$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \quad , \quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega$$

۵-۲- خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

۵-۲-۱- خطي بودن

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega) \\ x_2[n] \leftrightarrow X_2(j\Omega) \end{array}\right. \Rightarrow ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

۵-۲-۲- شیفت زماني

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega_0 n}X(j\Omega)$$

۵-۲-۳- شیفت فرکانسي

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n]e^{+j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

۵-۲-٤- مزدوج گیري (تقارن مزدوج)

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$
$$x[n]^* \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$$

سیگنال حقیقي و زوج $x[n]$ $\Rightarrow$ مطلقا حقیقي و زوج خواهد بود $X(j\Omega)$

سیگنال حقیقي و فرد $x[n]$ $\Rightarrow$ مطلقا موهومي و فرد خواهد بود $X(j\Omega)$

۵-۲-۵- تفاضل گیري و مجموع گیري

$$\left.\begin{array}{l} x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \\ x[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega n}X(j\Omega) \end{array}\right. \Rightarrow x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega n})X(j\Omega)$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال y[n] را بدست آورید اگر:

$$Y(j\Omega)=?\quad,\quad y[n-1]=\sum_{m=-\infty}^{n-1}x[m]\quad,\quad y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]$$

$$\begin{cases} y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m] \\ y[n-1]=\sum_{m=-\infty}^{n-1}x[m] \end{cases} \Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]$$

$$y[n]\leftrightarrow Y(j\Omega)$$

$$y[n-1]\leftrightarrow e^{-j\Omega}Y(j\Omega)$$

$$x[n]=y[n]-y[n-1]\leftrightarrow X(j\Omega)=y(j\Omega)-e^{-j\Omega}y(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(j\Omega)$$

۵-۲-۶- تبدیل فوریه تابع پله و ضربه

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

$$\delta[n]\overset{f}{\leftrightarrow}1$$

$$u[n]\overset{f}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\delta(\Omega)$$

۵-۲-۷- وارون زماني

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow x[-n]\leftrightarrow X(-j\Omega)$$

۵-۲-۸- گسترش زماني

توجه: این خاصیت در گسسته برقرار نیست چون حاصل، یك سیگنال جدید است.

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow x[kn]\leftrightarrow ?\times$$

۵-۲-۹- مشتق‌گیري در فرکانس

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow (jn)^{l}x[n]\leftrightarrow\frac{d^{l}X(j\Omega)}{d\Omega^{l}}$$

۵-۲-۱۰- ضرب و کانولوشن

$$x_1[n]\cdot x_2[n]\leftrightarrow X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega)$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(j\Omega) X_2(j(\Omega - \theta))$$

تذكر: $\otimes$ (كانولوشن متناوب) با كانولوشن ساده برابر است با اين تفاوت كه فقط در يك دوره تناوب محاسبه مي‌شود.

۵-۲-۱۱- دوگاني

توجه: در سيستم‌هاي زمان گسسته خاصيت دوگاني وجود ندارد چون n گسسته است اما Ω پيوسته است.

مثال ۲)

$$\delta[n] \xrightarrow{F} 1$$
$$? \xleftarrow[F^{-1}]{} 2\pi\delta(\Omega)$$

۵-۲-۱۲- رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

۵-۳- تبديل فوريه توابع متناوب

$$x[n] = x[n+N]$$
$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

مثال ۳) مطلوبست تبديل فوريه توابع نمايي مختلط $e^{\pm j\Omega_0 n}$.

تبديل فوريه اين توابع با توجه به خواص محاسبه مي‌شوند

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$
$$e^{\pm j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega \mp \Omega_0)$$

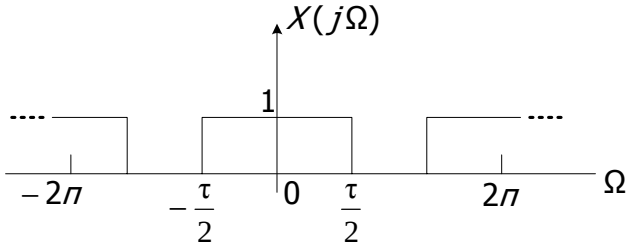
مثال ٤) مطلوبست تبديل فوريه قطار ضربه $p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN)$.

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$p[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mN)=\sum_{k=<N>}\frac{1}{N}e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\rightarrow P(j\Omega)=\sum_{k=<N>}\frac{2\pi}{N}\delta(\Omega-k\frac{2\pi}{N})$$

با توجه به متناوب بودن سيگنال قطار ضربه ابتدا سري فوريه آن را محاسبه و سپس تبديل فوريه سيگنال را محاسبه مي‌كنيم.

مثال ٥) اگر $X(j\Omega)=rect(\frac{\Omega}{\tau})$. مطلوبست x[n]=?

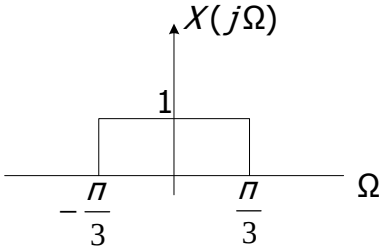


$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(j\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}e^{j\Omega n}\Big|_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$x[n]=\frac{1}{j2n\pi}(e^{j\frac{\tau}{2}n}-e^{-j\frac{\tau}{2}n})=\frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}\rightarrow rect(\frac{\Omega}{\tau})$$

مثال ٦)



$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n}\rightarrow rect(\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{3}})$$

مثال ٧) با توجه به پاسخ ضربه $h[n]=\frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$ مطلوبست:

الف) پاسخ فركانسي سيستم $H(j\Omega)$.

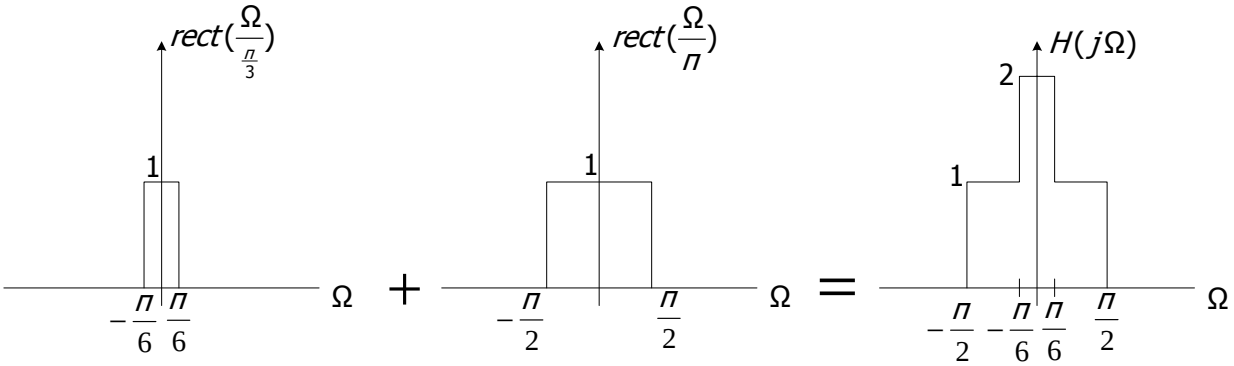
ب) خروجي y[n] اگر ورودي $x[n]=2\sin(\frac{\pi}{8}n)-2\cos(\frac{\pi}{4}n)$.

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

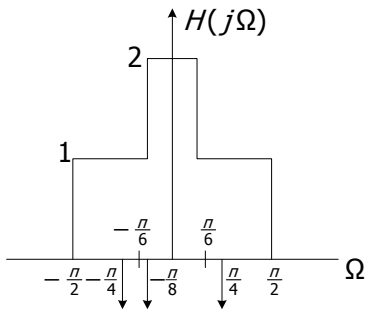
حل الف:

داریم $\frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{n\pi} \leftrightarrow rect(\frac{\Omega}{\tau}) \Rightarrow \begin{cases} \tau = \frac{\pi}{3}; & \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} \to rect(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) \\ \tau = \pi; & \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \to rect(\frac{\Omega}{\pi}) \end{cases}$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = rect(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) + rect(\frac{\Omega}{\pi})$$



حل ب:



$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{8}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{8}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$X(j\Omega) = 2\pi \times (\frac{1}{2j}\delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j}\delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}))$$

$$Y(j\Omega) = 2\pi \times (\frac{1}{2j}H(j(\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j}H(j(-\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - H(j(\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega - \frac{\pi}{4})$$

$$- H(j(-\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega + \frac{\pi}{4})) = 2\pi(2 \cdot \frac{1}{2j}\delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - 2 \cdot \frac{1}{2j}\delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}))$$

$$y[n] = 2\sin(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

یادآوري:

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$x[n]=\alpha^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \cdot e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha|<1$$

$$x[n]=(-\alpha)^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1+\alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha|<1$$

$$x[n]=\alpha^n u[-n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}\alpha^n \cdot e^{-j\Omega n}$$

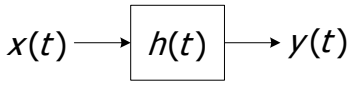
$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(\alpha^{-1}e^{-j\Omega})^n=\frac{1}{1-\alpha^{-1}e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-1}|<1 \text{ یا } |\alpha|>1$$

$$x[n]=(-\alpha)^n u[-n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}(-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(-\alpha^{-1}e^{j\Omega})^n=\frac{1}{1+\alpha^{-1}e^{j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-1}|<1 \text{ یا } |\alpha|>1$$

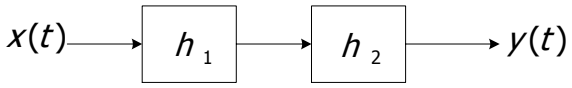
سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

۵-٤- سيستم‌هاي LTI و تبديل فوريه زمان پيوسته



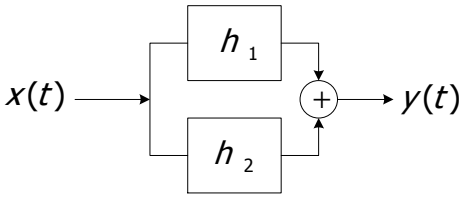
$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

اتصال سري:



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

اتصال موازي:



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

مثال ۱) تبديل فوريه تابع $h(t) = \dfrac{\sin(t) \cdot \sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$ را بدست آوريد.

$$h(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{t} = \frac{\sin(\frac{t}{\pi} \cdot \pi)}{\pi \cdot \frac{t}{\pi} \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2\pi} \cdot \pi)}{\frac{t}{2\pi} \cdot 2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}) \cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})$$

داريم $\rightarrow$
$$\begin{cases} \mathrm{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow a\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \\ \tau\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{\tau}) \end{cases}$$

سرای دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

$$\tau = 2 \Rightarrow 2\text{sinc}(\frac{t}{\pi}) \rightarrow 2\pi rect(\frac{\omega}{2})$$

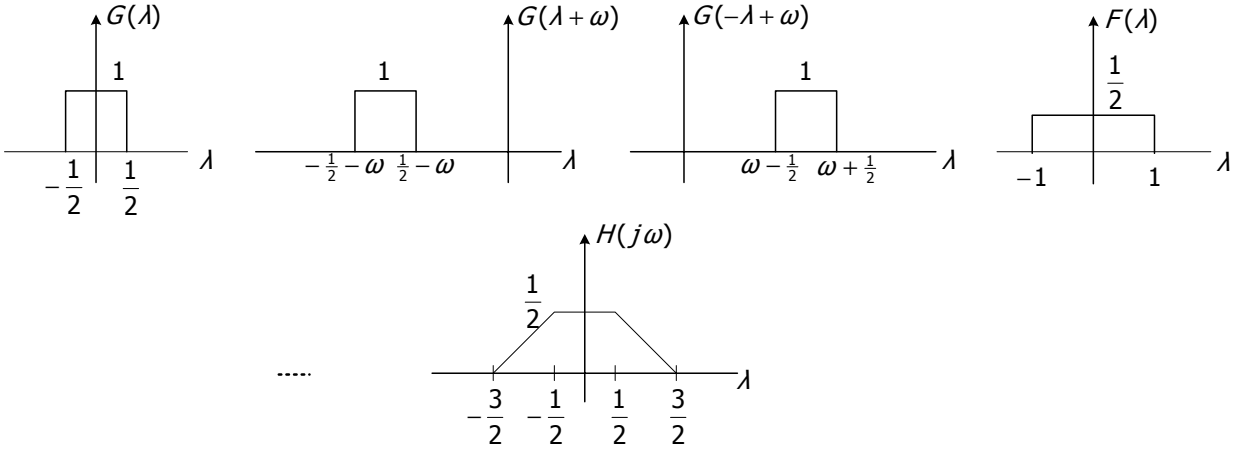
$$\tau = 1 \Rightarrow 1\,\text{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \rightarrow 2\pi rect(\frac{\omega}{1})$$

$$\xrightarrow{\text{داريم}} f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi})\cdot\text{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)\,2}(\pi rect(\frac{\omega}{2}) * 2\pi rect(\frac{\omega}{1})) = \underbrace{\frac{1}{2}rect(\frac{\omega}{2})}_{F(\omega)} * \underbrace{rect(\frac{\omega}{1})}_{G(\omega)}$$

$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\omega-\lambda)d\lambda$$

از روش گرافيكي حل مي‌كنيم:



مثال ۲) ورودي سيستم LTI و پاسخ ضربه سيستم در ذيل داده شده است. مطلوبست خروجي سيستم؟

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} \quad , \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} = \frac{\omega_i}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \quad , \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau = 2\omega_i \Rightarrow 2\omega_i\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \xrightarrow{f} 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2\omega_i}) \\ \tau = 2\omega_c \Rightarrow 2\omega_c\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c) \xrightarrow{f} 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2\omega_c}) \end{cases}$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega) = rect(\frac{\omega}{2\omega_i})\cdot rect(\frac{\omega}{2\omega_c})$$

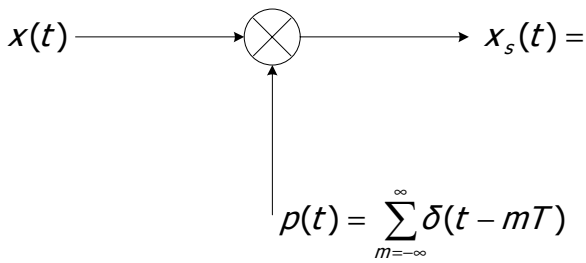
$$Y(j\omega) = \begin{cases} rect(\frac{\omega}{2\omega_i}) & ; \quad \omega_i < \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_i}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \\ rect(\frac{\omega}{2\omega_c}) & ; \quad \omega_i > \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c) \end{cases}$$

مثال ۳) اگر $p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$ باشد، مطلوبست $X_s(j\omega)$ با استفاده از تئوري نمونه‌برداري؟

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \quad ; \quad p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

مثال ٤) از سيگنال $x(t) = 2+\cos(50\pi t)$ تحت شرايط زير نمونه‌برداري مي‌شود. مطلوبست تبديل فوريه سيگنال نمونه‌برداري شده $X_s(j\omega)$ ؟

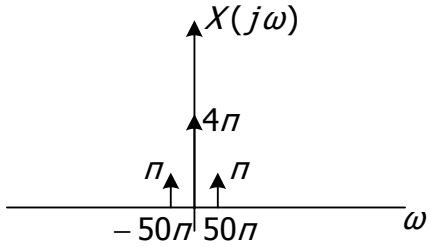


$$x_s(t) = x(t)\cdot p(t) \Rightarrow X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

الف) $T = \frac{1}{100}$

ب) $T = \frac{1}{40}$

$$x(t) = 2+\cos(50\pi t) \Rightarrow X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega+50\pi) + \pi\delta(\omega-50\pi)$$

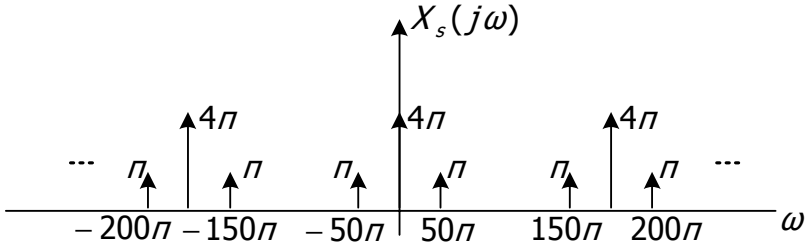


سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www elec ir

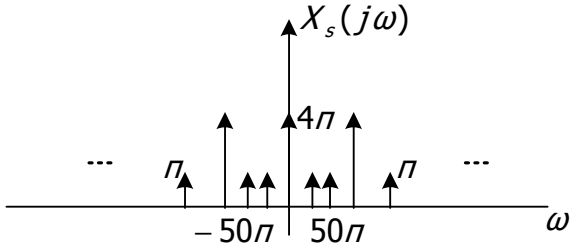
حل الف:

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$$



حل ب:

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{40}} = 80\pi$$



۵-٤-۱- سيستم‌هاي LTI با معادلات ديفرانسيل

بدست آوردن h(t) داراي اهميت زيادي است چون نشان دهنده رفتار تابع است.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

براي حل معادلات ديفرانسيل دو راه وجود دارد:

۱) ابتدا h(t) را بدست آورده و سپس $H(j\omega)$ كه تبديل فوريه h(t) است را بدست مي‌آوريم.

۲) ابتدا $H(j\omega)$ را بدست آورده و سپس h(t) را با عكس تبديل فوريه گرفتن از $H(j\omega)$ بدست مي‌آوريم.

مثال ۵) پاسخ سيستم LTI زير به ورودي $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ داده شده است، $y(t) = (2e^{-t} + 2e^{-4t})u(t)$

الف) مطلوبست پاسخ فركانسي سيستم $H(j\omega)$

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM

ب) پاسخ ضربه h(t)

ج) معادله ديفرانسيل ارتباط دهنده ورودي و خروجي

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

حل الف:

$$X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{1}{3+j\omega} \quad , \quad Y(j\omega)=\frac{2}{1+j\omega}-\frac{2}{4+j\omega}$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2(\frac{3}{(1+j\omega)(4+j\omega)})}{\frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}} \Rightarrow H(j\omega)=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$

حل ب:

$$H(j\omega)=\frac{\frac{3}{2}}{2+j\omega}+\frac{\frac{3}{2}}{4+j\omega} \Rightarrow h(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

حل ج:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{9+3(j\omega)}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2Y(j\omega)+6(j\omega)Y(j\omega)+8Y(j\omega)=9X(j\omega)+3(j\omega)X(j\omega)$$

با توجه به خاصيت مشتق زماني رابطه زير بدست مي‌آيد:

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=3x'(t)+9x(t)$$

مثال ٦) ورودي و خروجي يك سيستم LTI با معادله $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=2x(t)$ به هم مربوط مي‌شوند. مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سيستم h(t)

ب) اگر ورودي $x(t)=te^{-2t}u(t)$ خروجي را بدست آوريد.

حل الف:

$$(j\omega)^2Y(j\omega)+6(j\omega)Y(j\omega)+8Y(j\omega)=2X(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}=\frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}=\frac{1}{(j\omega+2)}+\frac{-1}{(j\omega+4)}$$

$$\Rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

حل ب: چون x(t) و h(t) هر دو توابع پيچيده‌اي هستند به جاي استفاده از كانولوشن مي‌توان ابتدا تبديل فوريه هر دو را بدست آورد سپس با عكس تبديل فوريه گرفتن از $Y(j\omega)$ پاسخ زماني سيستم y(t) را بدست آورد.

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$$

$$(jt)e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right) = \frac{-j}{(2+j\omega)^2}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2}\left(\frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)}\right) = \cdots$$

به روش تجزيه كسرها $Y(j\omega)$ بدست مي‌آيد و با استفاده از عكس تبديل فوريه y(t) محاسبه خواهد شد.

مثال ۷) يك سيستم LTI و علي با پاسخ فركانسي $H(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$ را در نظر بگيريد. براي يك ورودي خاص x(t) مشاهده مي‌شود كه خروجي به فرم $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ است.

مطلوبست ورودي x(t) ؟

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}}{\frac{1}{(3+j\omega)}} = \frac{1}{(4+j\omega)} \leftrightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$$

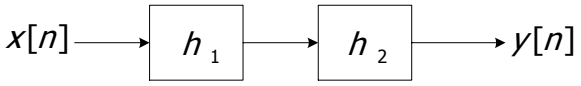
۵-۵- سيستم‌هاي LTI و تبديل فوريه زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$Y(j\Omega) = X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

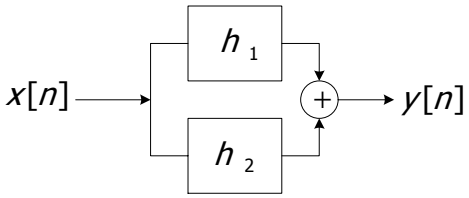
اتصال سري:

سراي دانشجو SARAYEDANESHJO.COM



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$
$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) \cdot H_2(j\Omega)$$

اتصال موازي:



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$
$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)$$

۵-۵-۱- سيستم‌هاي LTI با معادلات تفاضلي

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

مثال ۸) سيستم LTI زمان گسسته علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2} x[n-2]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سيستم h[n].

ب) پاسخ ضربه سيستم معكوس $h_I[n]$.

حل الف:

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

www elec ir

$$Y(j\Omega)+e^{-j\Omega}Y(j\Omega)+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}Y(j\Omega)=e^{-j\Omega}X(j\Omega)-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow (1+e^{-j\Omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega})Y(j\Omega)=(e^{-j\Omega}-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega})X(j\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=\frac{e^{-j\Omega}(1-(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+1-1))}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$=\frac{e^{-j\Omega}-e^{-j\Omega}(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})+e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=2e^{-j\Omega}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}-\frac{e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$\Rightarrow h[n]=2(-2n\,(-\frac{1}{2})^n u[n])-(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

حل ب:

$$h[n]*h_I[n]=\delta[n]\leftrightarrow H(j\Omega)\cdot H_I(j\Omega)=1$$

$$H(j\Omega)=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$H_I(j\Omega)=\frac{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}=\frac{e^{j\Omega}(1+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}+e^{-j\Omega})}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}=\frac{e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$h_I[n]=(\frac{1}{2})^{n+1}u[n+1]+\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]+(\frac{1}{2})^n u[n]$$

مثال ۹) در يك سيستم LTI و علي با توجه به پاسخ ضربه داده شده مطلوبست:

الف) پاسخ فركانسي $H(j\Omega)$ $\qquad h[n]=a^{|n|}\quad,\quad 0<a<1$

ب) نوع فيلتر.

حل الف:

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}\cdot e^{-j\Omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cdot e^{-j\Omega n}$$

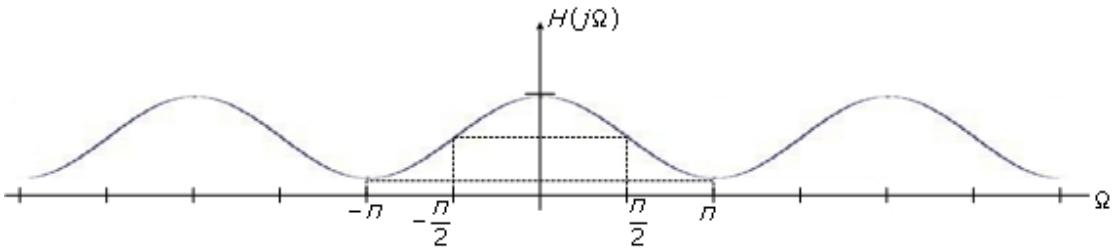
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a\,e^{j\Omega})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(a\,e^{-j\Omega})^n=\frac{a\,e^{j\Omega}}{1-a\,e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-a\,e^{-j\Omega}}=\frac{a\,e^{j\Omega}(1-a\,e^{-j\Omega})+1-a\,e^{j\Omega}}{(1-a\,e^{j\Omega})(1-a\,e^{-j\Omega})}$$

$$=\frac{1-a^2}{a^2+1-ae^{-j\Omega}-ae^{j\Omega}}=\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(\Omega)}$$

حل ب:

سراي دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM

$$H(j\Omega)=\begin{cases}\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}=\dfrac{1+a}{1-a} & \Omega=0\\[2ex] \dfrac{1-a^2}{(1-a)^2} & \Omega=\pm\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] \dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}=\dfrac{1-a}{1+a} & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



با توجه به شکل بدست آمده نوع فیلتر پایین‌گذز LPF است.

amir javedani malak

سرای دانشجو
SARAYEDANESHJO.COM