

تکلیف شماره ۲

نام درس: ریاضیات مهندسی

محمدعلی شفیعیان

۱- نشان دهید تابع مختلط $f(z) = z^2 \bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

۲- نشان دهید در مختصات قطبی و برای تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ، شرایط کوشی - ریمان به شکل زیر تبدیل می‌گردند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

۳- فرض کنید $f(z) = (\ln r)^2 - \theta^2 + 2i\theta \ln r$ که در آن $r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$ است، نشان دهید f برای $0 < \theta < \pi$ مشتق‌پذیر است. سپس $f'(z)$ را تعیین کنید.

۴- تحت چه شرایطی $e^{\alpha x} \cos \beta y$ هارمونیک است؟

۵- کدامیک از توابع زیر هارمونیک هستند. برای هر یک مزدوج هارمونیک آن را محاسبه کرده و تابع $f(z) = u + iv$ را بر حسب z بنویسید.

$$\text{الف) } 2xy + 3xy^2 - 2y^3 \quad \text{ب) } e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

۶- نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید:

$$\text{الف) } \cot z \quad \text{ب) } \tan(\pi z)(z^3 - z) \quad \text{پ) } \coth z \quad \text{ت) } \tanh(\pi z)(z^3 - z)$$

۷- نشان دهید:

$$\text{الف) } \overline{\sin z} = \sin \bar{z} \quad \text{ب) } \cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z$$

۸- بخش‌های حقیقی و موهومی z^z را بیابید.

۹- معادله $\sin z = 3$ را حل کنید.

۱۰- هرگاه $f(z) = u + iv$ و $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ باشد، آنگاه u را بیابید.

۱۱- در صورتی که تابع $f(z) = u + iv$ تحلیلی و $v = -\sin x \sinh y$ باشد، آنگاه u را بیابید.

۱۲- اگر تابع $v(x, y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x, y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ باشد، آنگاه با شرط $v(0,0) = 0$ مقدار $v(1,1)$ را به دست آورید.

۱۳- اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی و $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$ باشد، ضابطه $f(z)$ را به دست آورید.

۱۴- با کدام مقادیر a و b تابع $u(x, y) = x^2 + ay^2 + bxy$ همساز است؟

۱۵- اگر z یک عدد مختلط باشد، حاصل عبارت $|ze^{\frac{\pi}{3}i} - z|$ را به دست آورید.

ماضی و مستقبلش نسبت به توست

هر دو یک چیزند، پنداری که دو است

مولانا