سیگنال‌ها و سیستم‌ها

فصل اول

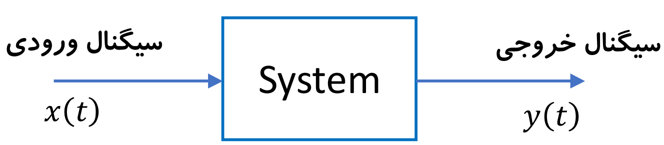
مقدمه‌ای بر سیگنال‌ها و سیستم‌ها

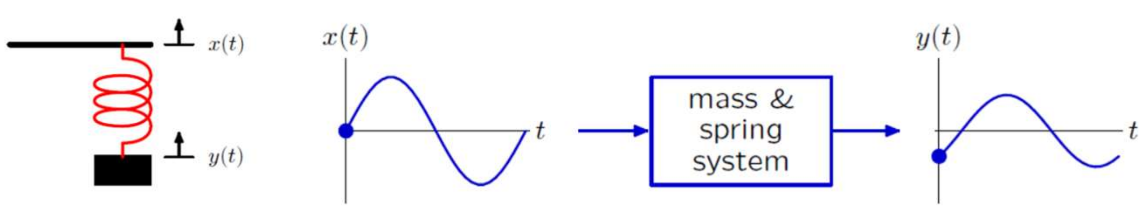
محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

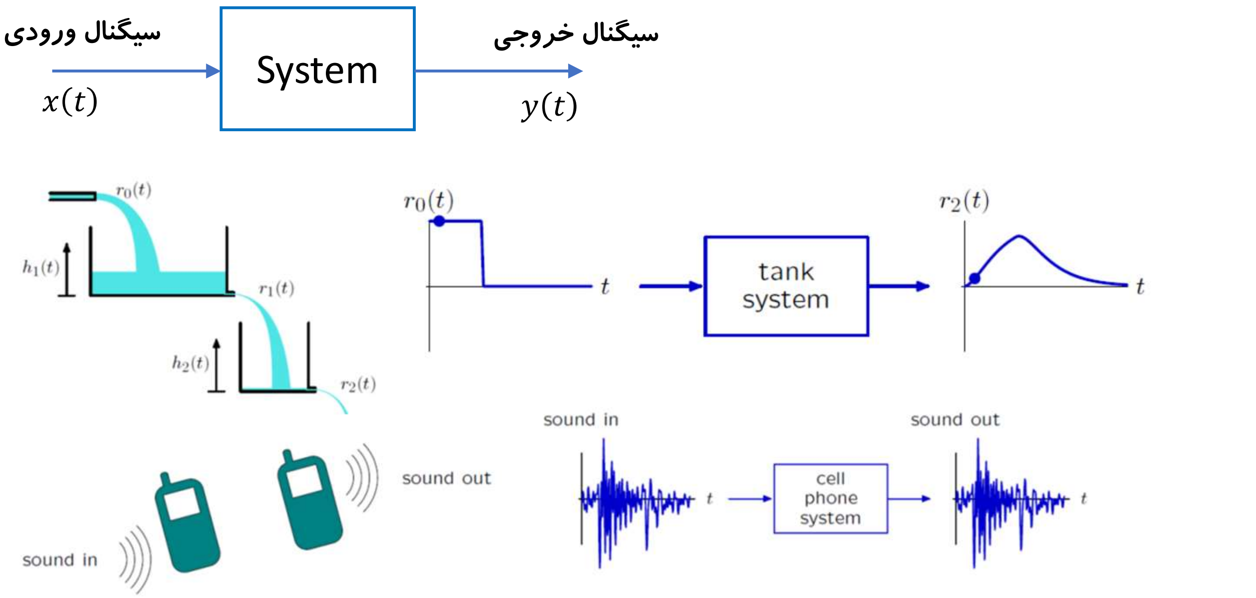
تعریف سیستم

سیستم، فرآیندی است که یک سیگنال را به یک سیگنال دیگر تبدیل می کند و بعضاً با اپراتورهای ریاضی مدل می‌شود.





تعریف سیستم



تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

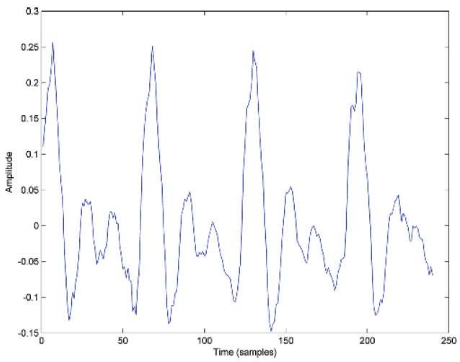
- زبان مناسب برای توصیف سیگنال‌ها و سیستم‌ها و ارائه مجموعه ای قوی از ابزارهای ریاضی برای تحلیل آنها
- آنالیز و سنتز

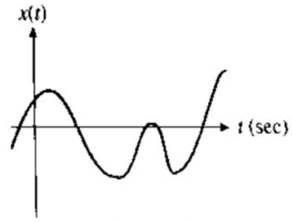
آنالیز: به معنی یافتن مدلی از سیستم است که با داشتن ورودی بتوان خروجی را پیش‌بینی کرد.

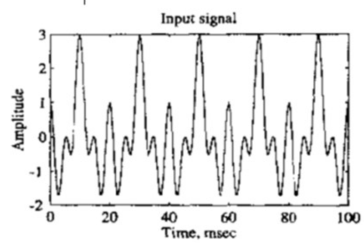
سنتز: یعنی طراحی سیستم از طریق انتخاب اجزای مناسب به‌گونه‌ای که سیستم در برابر ورودی‌های مختلف عکس‌العمل‌های متفاوت داشته باشد.

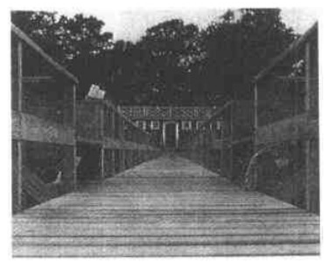
تعریف سیگنال

سیگنال، نمایش یک کمیت فیزیکی بر حسب یک یا چند متغیر مستقل است. به بیان دیگر، سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است









سیگنال‌ها

سیگنال‌ها

معین (Deterministic) $x(t) = 10\sin(2\pi t)$

تابع مشخصی از زمان است که هیچ نامعینی در مورد مقادیر آن در هر لحظه از زمان نداریم.

تصادفی (Stochastic)

سیگنال‌ها

سیگنال‌ها

۱ – سیگنال آنالوگ (زمان پیوسته – دامنه پیوسته)

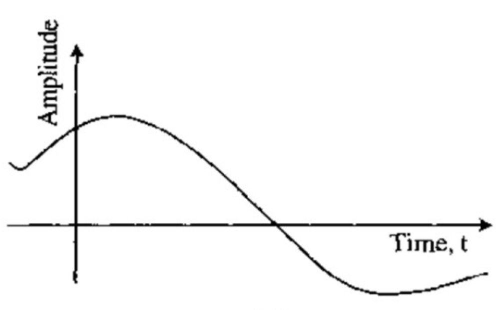
۲– سیگنال کوانتیزه (زمان پیوسته – دامنه گسسته)

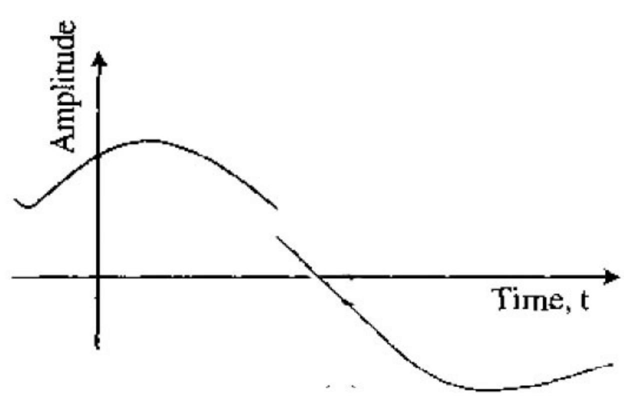
۳– سیگنال نمونه‌برداری شده (زمان گسسته – دامنه پیوسته)

۴– سیگنال دیجیتال (زمان گسسته – دامنه گسسته)

سیگنال‌ها

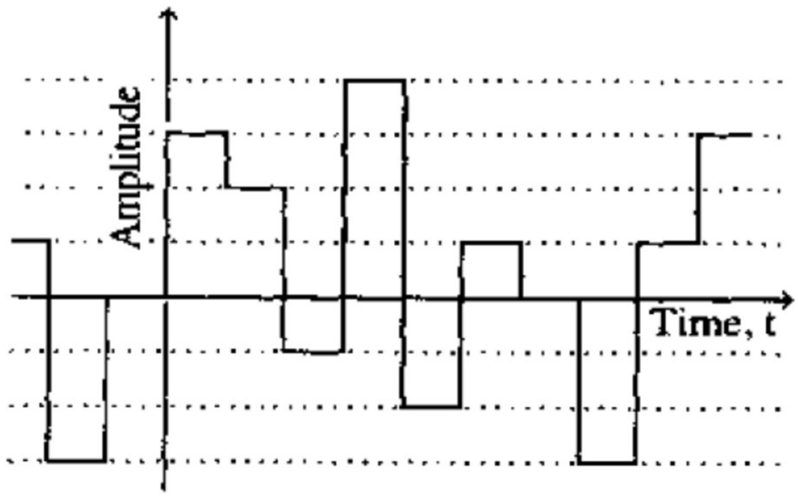
۱ – سیگنال آنالوگ (زمان پیوسته – دامنه پیوسته)





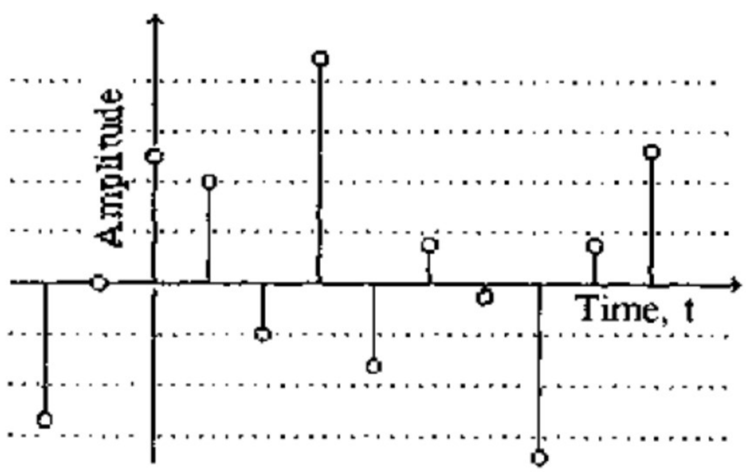
سیگنال‌ها

۲- سیگنال کوانتیزه (زمان پیوسته – دامنه گسسته)



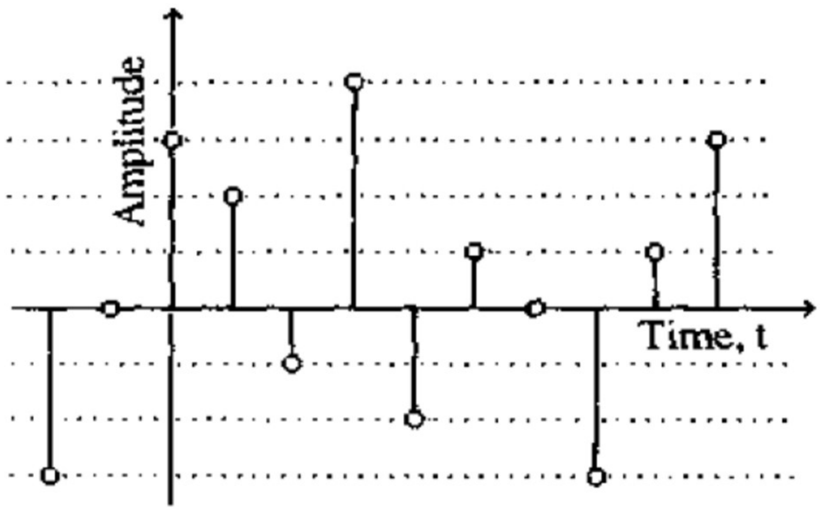
سیگنال‌ها

۳- سیگنال نمونه‌برداری شده (زمان گسسته – دامنه پیوسته)



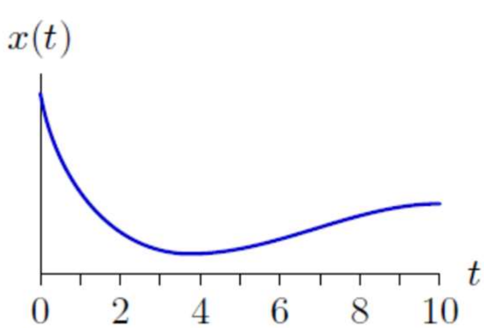
سیگنال‌ها

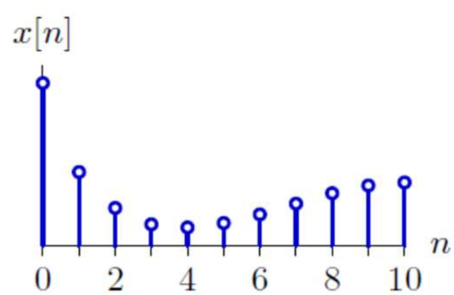
۴- سیگنال دیجیتال (زمان گسسته – دامنه گسسته)



سیگنال‌ها

سیگنال های زمان پیوسته (CT) و سیگنال‌های زمان گسسته (DT)





CT = Continuous Time

DT = Discrete Time

سیگنال‌ها

سیگنال‌ها
- سیگنال تک بُعدی: یک متغیر مستقل دارد.
- سیگنال چند بُعدی: بیش از یک متغیر مستقل دارد.

متغیرمستقل
- ۱- زمان گسسته ⬅ سیگنال زمان گسسته
- ۲- زمان پیوسته ⬅ سیگنال زمان پیوسته

سیگنال زمانی:

متغیر مستقل از جنس زمان است

سیگنال مکانی:

متغیر مستقل از جنس مکان است

سیگنال‌ها

مثال: کدام‌یک از سیگنال‌های زیر زمان گسسته و کدام یک زمان پیوسته هستند.

الف) شاخص هفتگی بازار سهام

ب) فشار جوی تابعی از ارتفاع

پ) درآمد متوسط خانوار

مثال: ابعاد سیگنال‌های زیر را مشخص کنید:

الف) سیگنال صحبت

ب) سیگنال تصویر

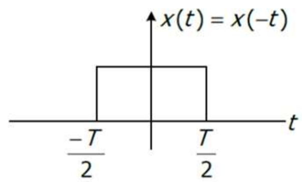
سیگنال‌ها

سیگنال‌ها
- سیگنال زوج (Even)
- سیگنال فرد (Odd)
- نه زوج و نه فرد

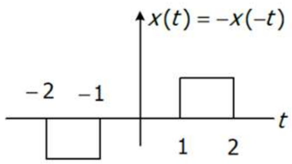
سیگنال زوج (Even):

پیوسته: $x(t) = x(-t)$

گسسته: $x[n] = x[-n]$



سیگنال فرد (Odd):



پیوسته: $x(t) = -x(-t)$

گسسته: $x[n] = -x[-n]$

سیگنال‌ها

سیگنال زوج و فرد

نکته ۱: در سیگنال‌های فرد، لزوماً مقدار سیگنال در لحظه صفر، صفر است.

نکته ۲: هر سیگنال دلخواه را می توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت:

$$x[n] = Even\{x[n]\} + Odd\{x[n]\}$$

$$Even\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]]$$

$$Odd\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]]$$

$$x(t) = Even\{x(t)\} + Odd\{x(t)\}$$

$$Even\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$Odd\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

سیگنال‌ها

سیگنال زوج و فرد

نکته ۱: در حالت کلی اگر سیگنال ها مختلط باشند، داریم:

تقارن مزدوج
$$\begin{cases} x^*(t) = x(-t) \\ x^*[n] = x[-n] \end{cases}$$

پادتقارن مزدوج
$$\begin{cases} x^*(-t) = -x(t) \\ x^*[-n] = -x[n] \end{cases}$$

سیگنال‌ها

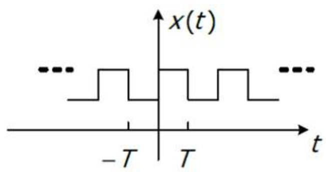
سیگنال‌ها
- **متناوب به سیگنالی گفته می شود که در بازه های زمانی مشخص عیناً تکرار شده باشد.**
- **نامتناوب**

سیگنال متناوب زمان پیوسته:

دوره تناوب: $T > 0 \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad x(t) = x(t+T) = x(t+kT) \quad \rightarrow \quad \forall t: -\infty < t < +\infty$

اگر $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، با دوره kT , $k \in \mathbb{N}$ نیز متناوب است. کوچکترین دوره تناوب $x(t)$ دوره تناوب اساسی (T_0) نامیده می‌شود.

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



$$T_0 = 2T$$

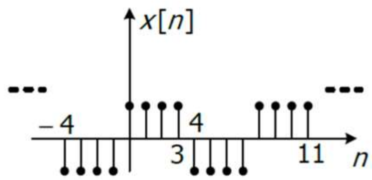
سیگنال‌ها

سیگنال‌ها:
- متناوب به سیگنالی گفته می شود که در بازه های زمانی مشخص عیناً تکرار شده باشد.
- نامتناوب

سیگنال متناوب زمان گسسته:

دوره تناوب: $N \in \mathbb{Z} > 0$ $\quad \forall n: -\infty < n < +\infty \quad \rightarrow \quad x[n] = x[n+N] = x[n+mN] \quad , m \in \mathbb{N}$

اگر $x[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشد، با دوره mN , $m \in \mathbb{N}$ نیز متناوب است. کوچکترین دوره تناوب $x[n]$ دوره تناوب اساسی (N_0) نامیده می‌شود. $\Omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$



$N_0 = 8$

سیگنال‌ها

سیگنال‌های متناوب

مثال: دوره تناوب سیگنال‌های زیر را به دست آورید:

$$x_1(t) = \sin(20\pi t) \quad \rightarrow \quad T_{01} = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad \omega_{01} = \frac{2\pi}{T_{01}} = 20\pi$$

$$x_2(t) = \cos(10\pi t) \quad \rightarrow \quad T_{02} = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{2}{10} \quad \rightarrow \quad \omega_{02} = \frac{2\pi}{T_{02}} = 10\pi$$

$$x_3(t) = \sin(31\pi t) \quad \rightarrow \quad T_{03} = \frac{2\pi}{31\pi} = \frac{2}{31} \quad \rightarrow \quad \omega_{03} = \frac{2\pi}{T_{03}} = 31\pi$$

$x_4(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow {}^{1}/_{10\pi}$ متناوب با دوره تناوب $\rightarrow \dfrac{T_{01}}{T_{02}} = \dfrac{10\pi}{20\pi} = \dfrac{1}{2}$

$x_5(t) = x_1(t) + x_3(t) \rightarrow$ نا متناوب $\rightarrow \dfrac{T_{01}}{T_{03}} = \dfrac{31\pi}{20\pi} = \dfrac{31}{20}$

سیگنال‌ها

سیگنال‌های متناوب

نکته: در صورتی جمع دو سیگنال متناوب، متناوب است که داشته باشیم:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \rightarrow \quad T = n_1 T_2 = n_2 T_1 \quad \rightarrow$$ ک.م.م دوره تناوب

مثال: سیگنال زیر متناوب یا نامتناوب است؟ در صورت متناوب بودن، دوره تناوب آن را به دست آورید.

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases}$$

با اینکه هر ضابطه تابع با دوره تناوب 2π متناوب است، به علت ناپیوستگی تابع در مبدأ، سیگنال متناوب نیست.

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

انرژی سیگنال CT در بازه $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

انرژی سیگنال DT در بازه $n_1 \leq n \leq n_2$:

$$E(n_1, n_2) = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

انرژی کل سیگنال: $\begin{cases} t \to \infty \\ n \to \infty \end{cases}$

$$CT: E_\infty = E(-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$DT: E_\infty = E(-\infty, \infty) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

توان متوسط سیگنال:

$$CT: P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$DT: P(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

توان متوسط کل:

$$CT: P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T}$$

$$DT: P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{E_\infty}{2N+1}$$

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

تعریف: سیگنال انرژی سیگنالی است با E_∞ محدود $(E_\infty < \infty)$

تعریف: سیگنال توان سیگنالی است با P_∞ محدود $(P_\infty < \infty)$

تذکر ۱: ممکن است یک سیگنال نه انرژی باشد و نه توان یعنی دارای $E_\infty = \infty$ و $P_\infty = \infty$ باشد؛ چنین سیگنال‌هایی در کاربردهای مهندسی مطلوب نیستند.

تذکر ۲: روابط ارائه شده برای توان و انرژی لزوماً معنی فیزیکی ندارند و ممکن است بعضاً ابعاد غلطی نیز داشته باشند.

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

نکته ۱: اگر E_∞ محدود باشد (سیگنال انرژی باشد)، توان متوسط آن صفر خواهد بود $(E_\infty = 0)$.

نکته ۲: اگر P_∞ محدود باشد (سیگنال توان باشد)، انرژی آن سیگنال (E_∞) حتماً نامحدود خواهد بود.

نکته ۳: هر سیگنال با دوره محدود لزوماً انرژی است.

نکته ۴: سیگنال‌های متناوب سیگنال توان هستند.

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

مثال: انرژی کل سیگنال گسسته $x[n]$ با ضابطه زیر را به‌دست آورید.

$$x[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad |a| < 1$$

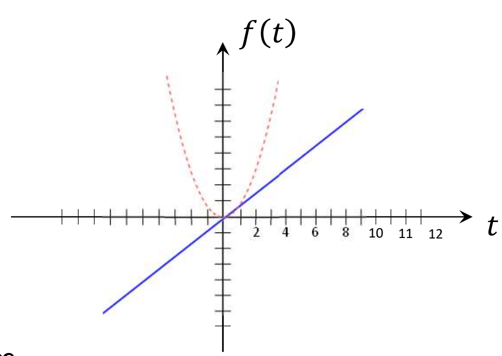
$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|a^n|)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|a^2|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (|a|^2)^n = \frac{1}{1-|a|^2}$$

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

مثال: سیگنال انرژی یا سیگنال توان بودن تابع زیر را به‌دست آورید.

$$x(t) = t$$



$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 dt \to \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |t|^2\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} 2 \int_{0}^{T} t^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{T^3}{3T} = \lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{3} \to \infty$$

این سیگنال نه سیگنال انرژی است و نه سیگنال توان

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

مثال: سیگنال انرژی یا سیگنال توان بودن تابع زیر را به‌دست آورید.

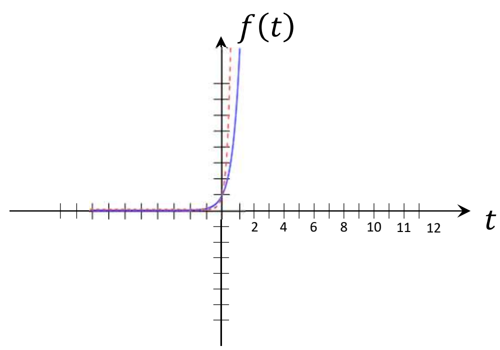
$$x(t) = e^t$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^t|^2 dt \to \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |e^t|^2\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{2t}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_{-T}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{2}(e^{2T} - e^{-2T})\right] \to \infty$$



این سیگنال نه سیگنال انرژی است و نه سیگنال توان

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

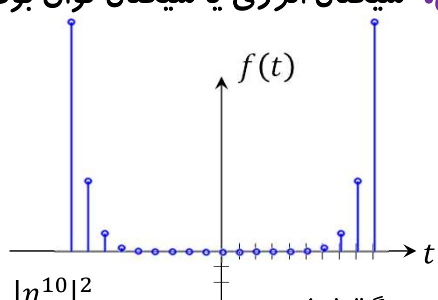
مثال: سیگنال انرژی یا سیگنال توان بودن تابع زیر را به‌دست آورید.

$$x[n] = n^{10}$$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^{10}|^2 \to \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |n^{10}|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left[\frac{2N^{21}}{21} + N^{20} + \frac{10N^{19}}{3} - 19N^{17} + \frac{2584N^{15}}{21} - 646N^{13} + \frac{83980N^{11}}{33} - \frac{446386N^9}{63} + 12920N^7 - \frac{68723N^5}{5} + \frac{438670N^3}{63} - \frac{174611N}{165} \right] \to \infty$$



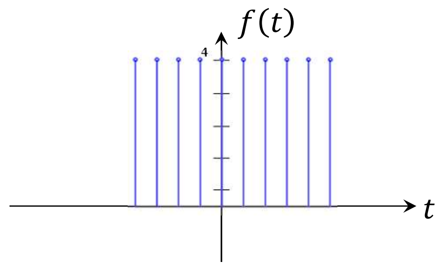
این سیگنال نه سیگنال انرژی است و نه سیگنال توان

سیگنال‌ها

انرژی و توان سیگنال

مثال: سیگنال انرژی یا سیگنال توان بودن تابع زیر را به‌دست آورید.

$x[n] = 4$



$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ۱۶ = \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{N\to\infty} \frac{۱}{۲N+۱} \sum_{n=-N}^{N} ۱۶ = ۱۶$$

عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر وابسته

گسسته	پیوسته
$y[n] = Ax[n]$	$y(t) = Ax(t)$
$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$	$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$
$y[n] = x[n] - x[n-1]$	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$	$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, d\lambda$

عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

شیفت زمانی

$$y(t) = x(t - t_0) \qquad\qquad y[n] = x[n - n_0]$$

شیفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شیفت می‌دهیم تا y(t) بدست آید.

شیفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شیفت می‌دهیم تا y(t) بدست آید.

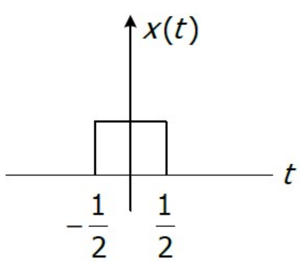
تذکر ۱: چنانچه $t_0 > 0$ باشد، سیگنال $x(t - t_0)$ از x(t) عقبتر است (به لحاظ زمانی) و چنانچه $t_0 < 0$ باشد، سیگنال $x(t - t_0)$ از x(t) جلوتر است.

تذکر ۲: در مورد سیگنال‌هاي زمان گسسته نیز بسته به اینکه n_0 مثبت و یا منفي باشد سیگنال x[n] را به راست و یا چپ به اندازه n_0 واحد شیفت می‌دهیم تا y[n] بدست آید.

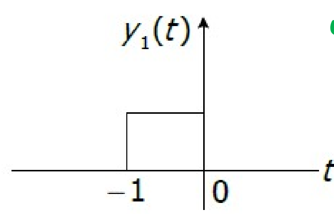
عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

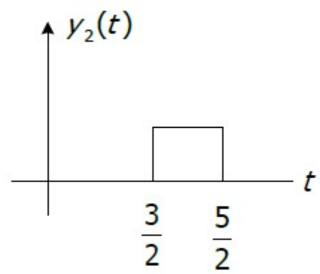
شیفت زمانی



$y_1(t) = x(t + \frac{1}{2})$



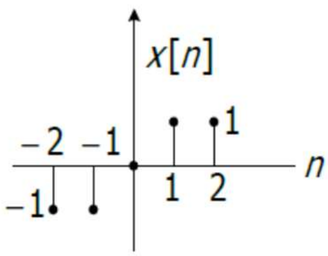
$y_2(t) = x(t - 2)$



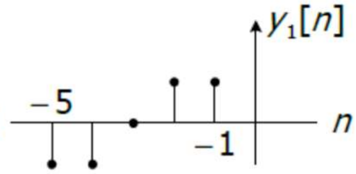
عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

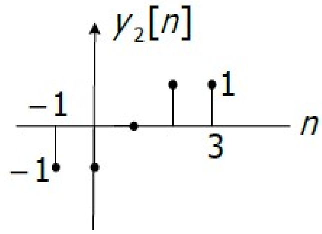
شیفت زمانی



$y_1[n] = x[n+3]$



$y_2[n] = x[n-1]$



در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي‌توان سيگنالي را به صورت زوج يا فرد درآورد.

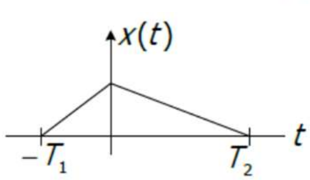
عملیات روی سیگنال‌ها

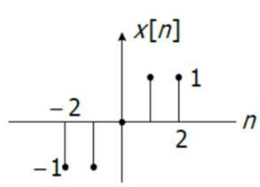
عملیات روی متغیر مستقل

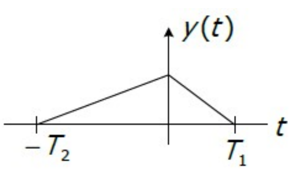
وارون‌سازی زمانی

$y(t) = x(-t)$ $\qquad$ $y[n] = x[-n]$

x(-t) یا x[-n] انعکاس x(t) و یا x[n] نسبت به محور قائم هستند.

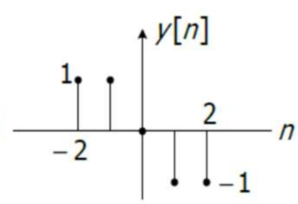






$y(t) = x(-t)$

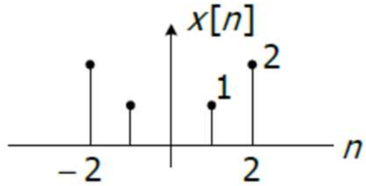
$y[n] = x[-n]$



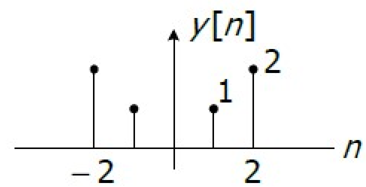
عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

وارون‌سازی زمانی



$$y[n] = x[-n]$$



براي سيگنالي كه نه زوج و نه فرد است وارون زماني آن نه فرد و نه زوج است. اما براي سيگنال زوج وارون زماني زوج است ولي براي سيگنال فرد با توجه به خاصيت $x[n]= -x[-n]$ وارون زماني آن $-x[n]$ است.

عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی

$$y(t) = x(at) \quad ; a \in IR$$

الف) اگر $|a|>1$ باشد $y(t)$ فشرده شده سيگنال $x(t)$ خواهد بود.

ب) اگر $|a|<1$ باشد $y(t)$ باز شده سيگنال $x(t)$ خواهد بود.

ج) اگر $a < 0$ باشد بايد بعد از تغيير مقياس ، وارون زماني انجام داد.

عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی

$y[n] = x[kn]$ یا $y[n] = x[\frac{1}{k}n] \quad ; k \in Z$

تذکر: در زمان پیوسته ماهیت سیگنال عوض نمي‌شود، اما در زمان گسسته ماهیت سیگنال تغییر مي‌کند و سیگنال جدیدي بدست مي‌آید.

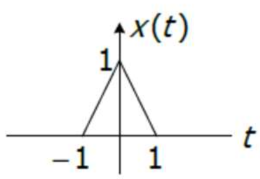
تذکر: $y[n]=x[kn]$ نسبت به $x[n]$ فشرده شده، که برخی از مقادیر را از دست می‌دهد.

تذکر: $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به $x[n]$ باز شده که در نتیجه تعدادي صفر به $y[n]$ اضافه خواهد شد. بدين ترتيب ماهيت سيگنال گسسته در اثر تغيير مقياس زماني تغيير مي‌کند.

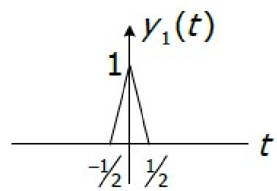
عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

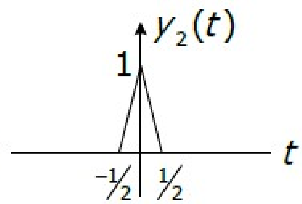
تغییر مقیاس زمانی



$y_1(t) = x(2t)$



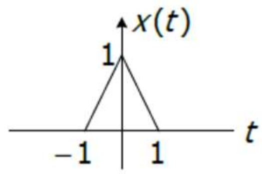
$y_2(t) = x(-2t)$



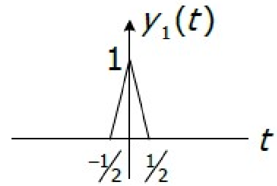
عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

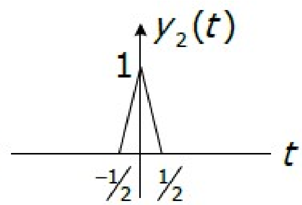
تغییر مقیاس زمانی



$y_1(t) = x(2t)$



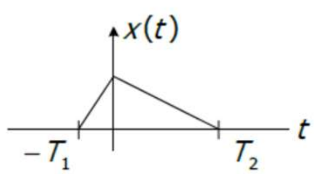
$y_2(t) = x(-2t)$



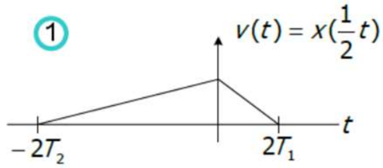
عملیات روی سیگنال‌ها

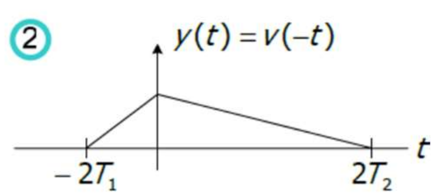
عملیات روی متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی



$$y(t) = x(-\frac{1}{2}t)$$



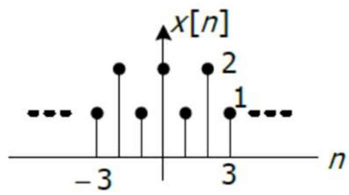


عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی

$y_1[n] = x[2n]$, $N = 2$



برای حل اینگونه مسائل به روش زیر عمل می‌کنیم:

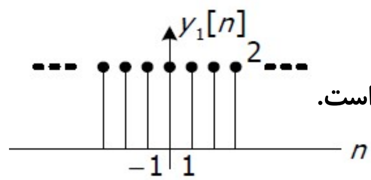
با جایگذاری n در فرمول $y[n]$ مقادیر به‌دست آمده بر حسب $x[n]$ می‌باشد:

$y[0] = x[0] = 2$

$y[1] = x[2] = 2$

$y[2] = x[4] = 2$

$y[-1] = x[-2] = 2$



دوره تناوب سیگنال جدید $x[2n]$ برابر $N = 1$ است.

عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی

$y_2[n] = x[\frac{1}{2}n]$

$\vdots$

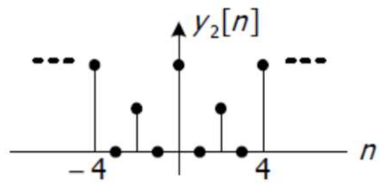
$y[-1] = 0$

$y[0] = x[0] = 2$

$y[1] = x[\frac{1}{2}] = 0$

$y[2] = x[1] = 1$

$\vdots$



دوره تناوب سیگنال جدید برابر $N = 4$ است.

عملیات روی سیگنال‌ها

عملیات روی متغیر مستقل

تغییر مقیاس زمانی

تذکر۱: $y[n]=x[kn]$ نسبت به $x[n]$ فشرده شده، که برخی از مقادیر را از دست می‌دهد.

تذکر۲: $y[n]=x\left[\frac{1}{k}n\right]$ نسبت به $x[n]$ باز شده که نتیجه تعدادی صفر به $y[n]$ اضافه خواهد شد.

بدین ترتیب ماهیت سیگنال گسسته در اثر تغییر مقیاس زمانی تغییر می‌کند.

تذکر۳: اگر سیگنال زمان پیوسته و یا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغییر مقیاس زمانی در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سیگنال جدید کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سیگنال جدید افزایش می‌یابد.

عملیات روی سیگنال‌ها

رسم سیگنال به روش منظم

$$x(t) \rightarrow y(t)=x(at-b)$$

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow v(t)=x(t-b) \\ v(t) \rightarrow y(t)=v(at)=x(at-b) \end{cases}$$

یا

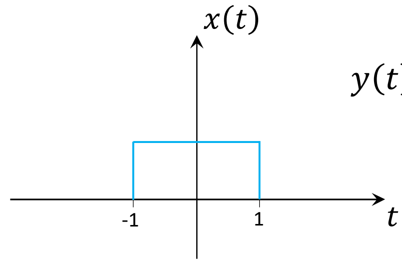
$$\begin{cases} x(t) \rightarrow v(t)=x(at) \\ v(t) \rightarrow y(t)=x\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)=x(at-b) \end{cases}$$

$$x[n] \rightarrow y[n]=x[kn-n_0]$$

$$\begin{cases} x[n] \rightarrow v[n]=x[n-n_0] \\ v[n] \rightarrow y(t)=v[kn]=x[kn-n_0] \end{cases}$$

عملیات روی سیگنال‌ها

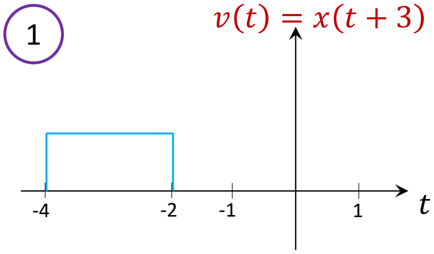
مثال:



$y(t) = x(-2t+3) = ?$

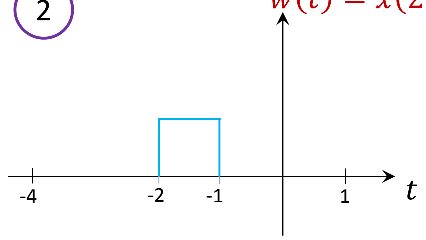
1

$v(t) = x(t+3)$



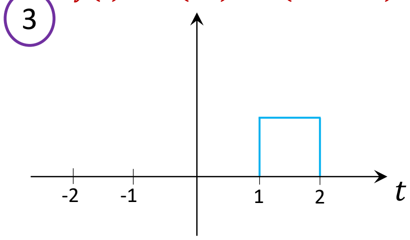
2

$w(t) = x(2t+3)$



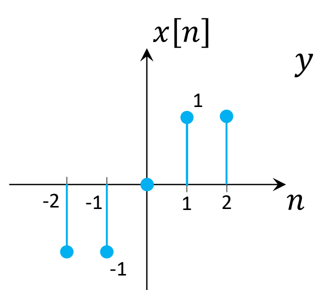
3

$y(t) = w(-t) = x(-2t+3)$



عملیات روی سیگنال‌ها

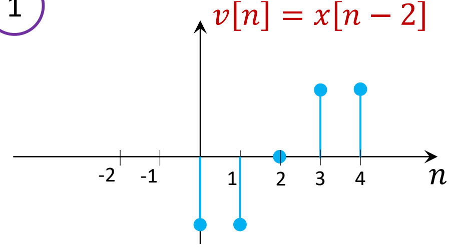
مثال:



$y[n] = x[3n-2] = ?$

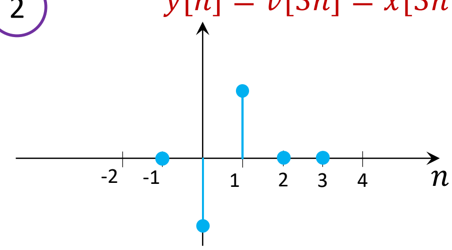
1

$v[n] = x[n-2]$



2

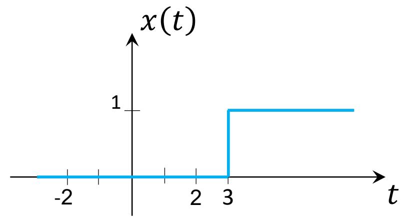
$y[n] = v[3n] = x[3n-2]$



عملیات روی سیگنال‌ها

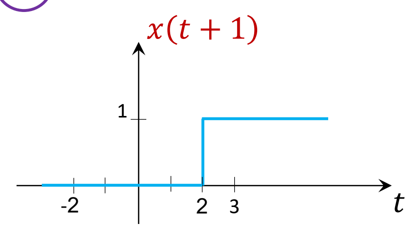
مثال:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$

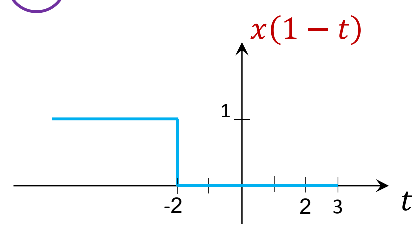


الف) $y_1(t) = x(1-t)$

1



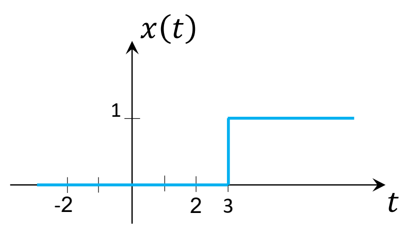
2



عملیات روی سیگنال‌ها

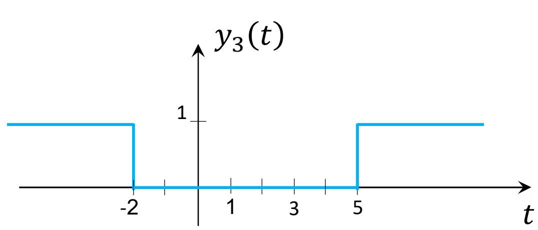
مثال:

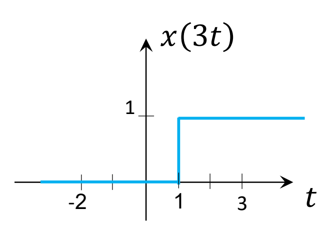
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$



ب) $y_2(t) = x(3t)$

پ) $y_3(t) = x(1-t) + x(t-2)$





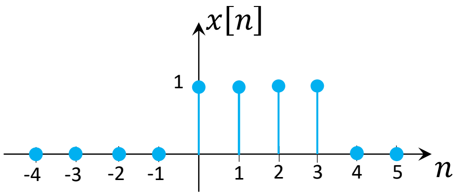
عملیات روی سیگنال‌ها

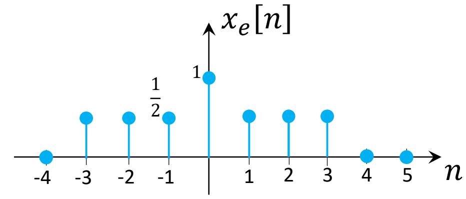
مثال: مطلوب است محاسبه قسمت زوج و فرد سیگنال زیر:

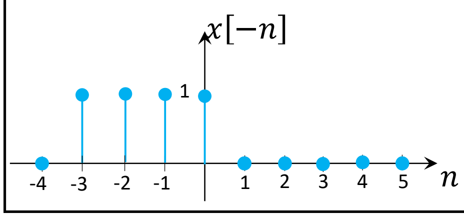
$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1,2,3 \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

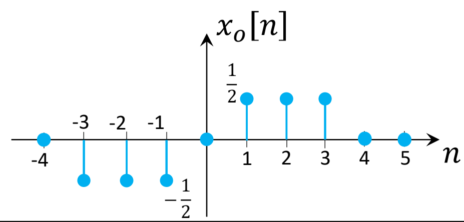
میدانیم

$$\begin{cases} x_e = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \\ x_o = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$$





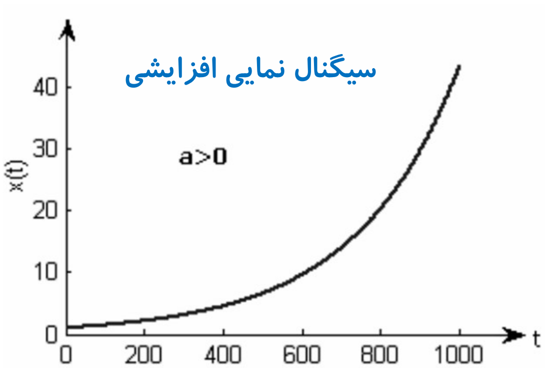


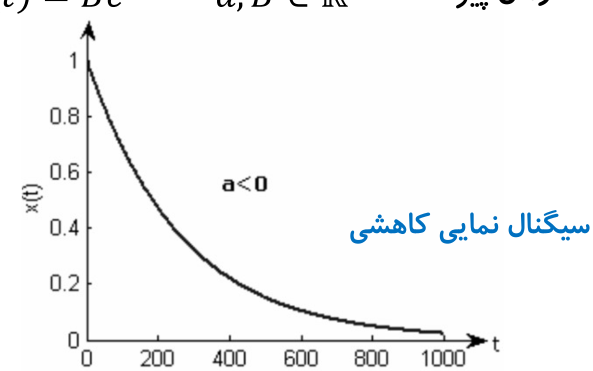


معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال نمایی

زمان پیوسته: $x(t) = Be^{at} \qquad a, B \in \mathbb{R}$





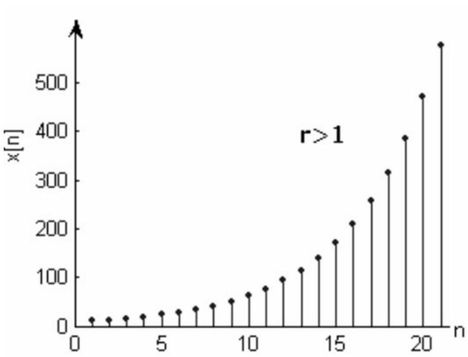
تذکر: چنانچه دامنه سیگنال خروجی سیستمی با افزایش زمان به طور نامحدود زیاد شود، سیستم تحت بررسی به عنوان سیستم ناپایدار شناخته می شود.

معرفی سیگنال‌های مهم

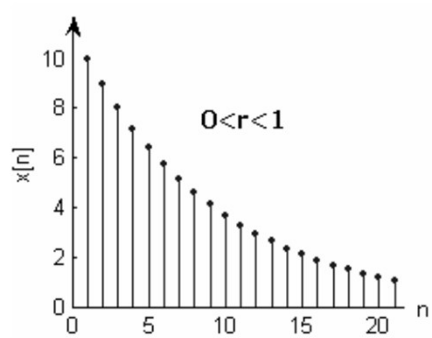
سیگنال نمایی

زمان گسسته: $x[n] = Br^n$

سیگنال زمان گسسته نمایی بسته به مقادیر مختلف r چهار حالت می تواند داشته باشد.



سیگنال نمایی افزایشی



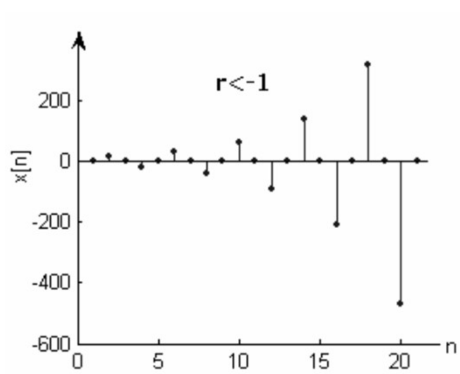
سیگنال نمایی کاهشی

معرفی سیگنال‌های مهم

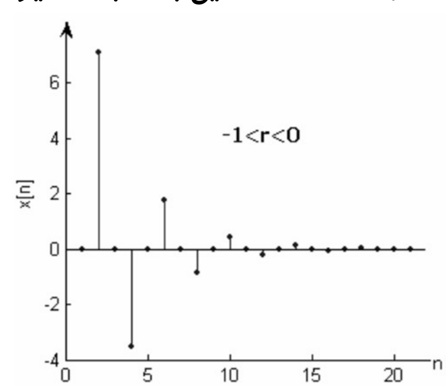
سیگنال نمایی

زمان گسسته: $x[n] = Br^n$

سیگنال زمان گسسته نمایی بسته به مقادیر مختلف r چهار حالت می تواند داشته باشد.



سیگنال نوسانی افزایشی



سیگنال نوسانی کاهشی

معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال سینوسی

زمان پیوسته:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

تذکر: سیگنال سینوسی همواره متناوب با دوره تناوب T است

$$x(t) = \cos(\frac{1}{6}t) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

$$x(t) = \cos(\frac{8\pi}{31}t) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}$$

معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال سینوسی

زمان گسسته:

$$x[n] = A\cos(\Omega n + \varphi) \qquad \Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{N}$$

تذکر: سیگنال زمان گسسته سینوسی به شرطی متناوب است که بتوان $N \in \mathbb{Z}^+$ را به‌دست آورد به گونه‌ای که $x[n] = x[n+N]$ گردد. (این سیگنال بر خلاف سیگنال زمان پیوسته سینوسی بعضاً متناوب نیست)

$$A\cos(\Omega n + \varphi) = A\cos(\Omega n + \Omega N + \varphi) \rightarrow \Omega N = 2k\pi \quad , \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\Omega}, N \in Z^+$$

معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال سینوسی

$$A\cos(\Omega n+\varphi)=A\cos(\Omega n+\Omega N+\varphi)\ \rightarrow \Omega N=2k\pi \quad , \quad k\in Z$$

$$\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\Omega}, N\in Z^{+}$$

$$x[n]=\cos[\frac{2\pi}{12}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}}=12k=12 \qquad (k=1)$$

$$x[n]=\cos[\frac{8\pi}{31}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}}=\frac{31}{4}k=31 \qquad ,(k=4)$$

$x[n]=\cos[\frac{1}{6}n] \Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{1}{6}}=12k\pi$ متناوب نیست

معرفی سیگنال‌های مهم

گستره فرکانس در حوزه زمان پیوسته و زمان گسسته

در حوزه زمان پیوسته محدوده فرکانسی بین $+\infty$ و $-\infty$ تغییر می‌کند هر فرکانسی در این بازه مشخصات مربوط به خود را دارد با توجه به رابطه فرکانس زاویه ای ω با فرکانس خطی f یعنی $\omega = 2\pi f$ در حوزه زمان پیوسته و حدود تغییرات از $+\infty$ تا $-\infty$ است. با افزایش فرکانس در هر مرحله سیگنال جدیدی به دست می‌آید مثل $\cos 2\pi f t$.

در حوزه زمان گسسته بازه فرکانسی بسیار محدودتر از حالت زمان پیوسته است در این حوزه، بازه فرکانسی به طور ۱ هرتز در نظر گرفته می‌شود که رایج ترین بازه برای آن $(-0.5,0.5]$ است که متناظر آن برای Ω به صورت $(-\pi,\pi]$ است. در سیگنال های گسسته با افزایش فرکانس از حد معینی یک سیگنال تکراری بدست می آید یعنی $\cos 2\pi(f+1)\,n=\cos 2\pi f n$.

معرفی سیگنال‌های مهم

گستره فرکانس در حوزه زمان پیوسته و زمان گسسته

به عبارت دیگر در حالت زمان گسسته داریم:

$$\cdots = f_0 - 2 = f_0 - 1 = f_0 = f_0 + 1 = f_0 + 2 = \cdots$$

فرکانس خطی	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
فرکانس زاویه‌ای	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
مشخصه فرکانسی	فرکانس بالا	فرکانس میانی	فرکانس پایین	فرکانس میانی	فرکانس بالا

معرفی سیگنال‌های مهم

گستره فرکانس در حوزه زمان پیوسته و زمان گسسته

فرکانس خطی	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
فرکانس زاویه‌ای	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
مشخصه فرکانسی	فرکانس بالا	فرکانس میانی	فرکانس پایین	فرکانس میانی	فرکانس بالا

فرکانس بالا $\rightarrow$ $\cos(\pi n) = (-1)^n = e^{i\pi n}$

فرکانس پایین $\rightarrow$ $\cos 0n = \cos(2\pi n)$

فرکانس میانی $\rightarrow$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال نمایی مختلط

زمان پیوسته:

$$x(t) = Be^{j\omega t} \quad \text{یا} \quad x(t) = B\, e^{-j\omega t}$$

$$x(t) = B\, e^{j\omega t} = B\cos(\omega t) + jB\sin(\omega t) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

زمان گسسته:

$$x[n] = Be^{+j\Omega n} \quad \text{یا} \quad x[n] = B\, e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = B\, e^{j\Omega n} = B\cos(\Omega n) + jB\sin(\Omega n) \qquad N = \frac{2k\pi}{\Omega} \qquad N \in Z^+, K \in Z$$

معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال نمایی مختلط

تذکر ۱: سیگنال زمان گسسته نمایی مختلط $x[n] = Be^{+i\Omega n}$ می‌تواند در زمان، متناوب با دوره تناوب N باشد.

تذکر ۲: سیگنال زمان گسسته نمایی مختلط $x[n] = Be^{+i\Omega n}$ علاوه بر اینکه می‌تواند در زمان نسبت به n متناوب باشد، در فرکانس نیز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+4\pi)n} = e^{j(\Omega+2m\pi)n} \qquad m \in z$$

تذکر ۳: اگر سیگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امکان باید به حاصل جمع دو سیگنال تبدیل شود و دوره تناوب هر کدام را جداگانه به دست آورد، سپس دوره تناوب مشترک را به دست می‌آوریم.

معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال نمایی مختلط

مثال:

الف) $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$$

$$\Rightarrow T = 2\pi$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \ldots$$

ب) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3k = 3 = 6 = 9 = \ldots = 24$$

$$N = 24$$

$$N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8k}{3} = 8 = 16 = 24 = \ldots$$

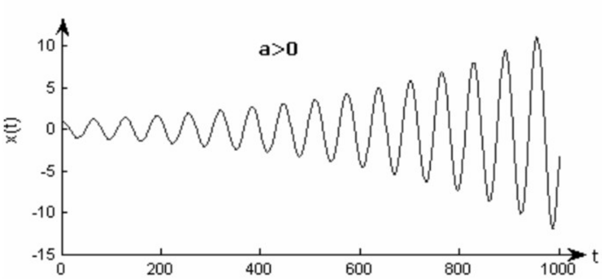
معرفی سیگنال‌های مهم

سیگنال سینوسی میراشونده

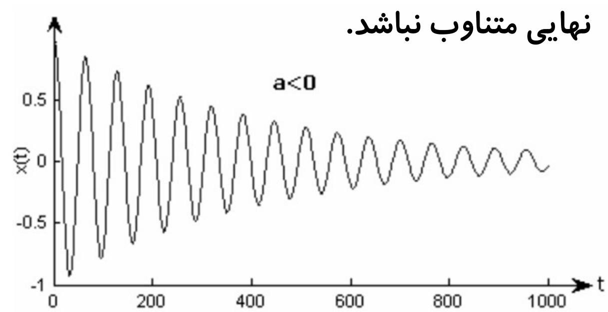
زمان پیوسته:

$$x(t) = Be^{at}\cos(\omega t + \varphi)$$

تذکر: سیگنال نمایی متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتی باعث می شود که سیگنال نهایی متناوب نباشد.



سیگنال سینوسی میراشونده افزایشی



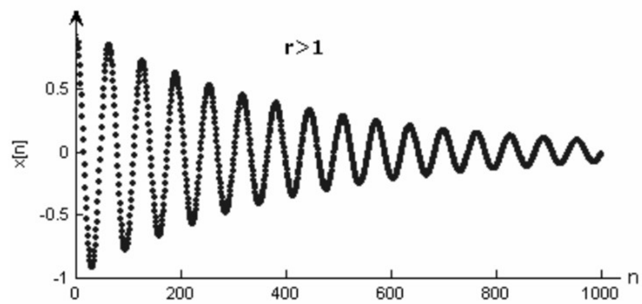
سیگنال سینوسی میراشونده کاهشی

معرفی سیگنال‌های مهم

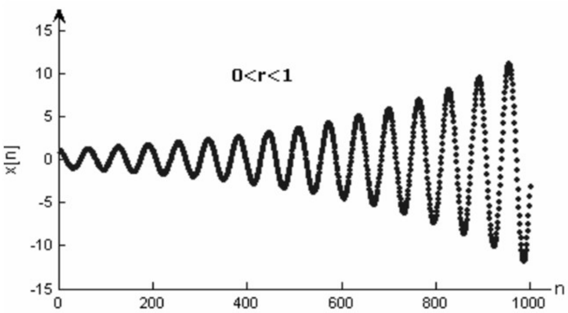
سیگنال سینوسی میراشونده

زمان گسسته:

$$x[n] = B(r^n)\cos[\Omega n + \varphi]$$



سیگنال سینوسی میراشونده کاهشی



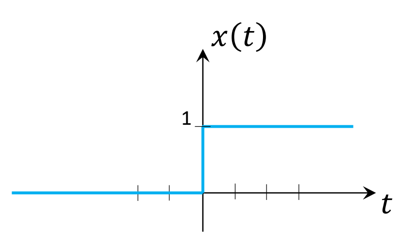
سیگنال سینوسی میراشونده افزایشی

توابع ویژه

تابع پله واحد

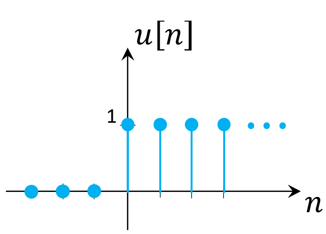
زمان پیوسته:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



زمان گسسته:

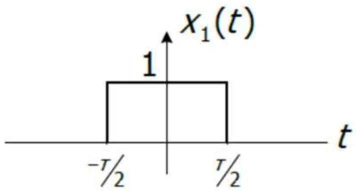
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

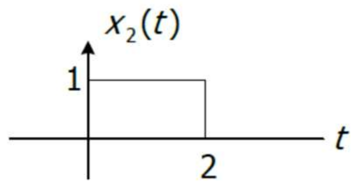


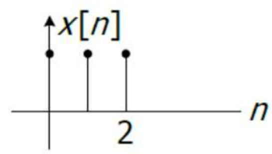
توابع ویژه

تابع پله واحد

تذکر: توابعی که فرم هندسی دارند را می توان بر حسب تابع پله بیان کرد.





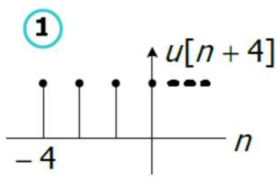


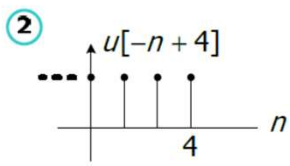
$x_1(t) = u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})$

$x_2(t) = u(t) - u(t-2)$

$x[n] = u[n] - u[n-3]$

$u[-n+4]$



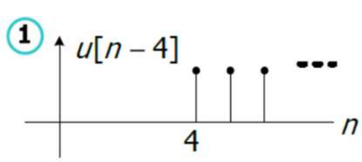


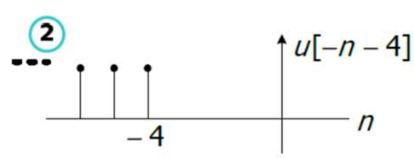
توابع ویژه

تابع پله واحد

تذکر: توابعی که فرم هندسی دارند را می توان بر حسب تابع پله بیان کرد.

$u[-n-4]$





توابع ویژه

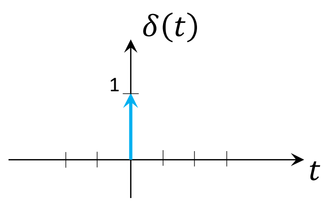
تابع ضربه واحد

زمان پیوسته:

$$\delta(t) = \begin{cases} ? & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

دلتای دیراک یا ضربه واحد

نکته ۱: دلتای دیراک حالت ایده‌آلی است از سیگنالی با دامنه خیلی بزرگ نزدیک $t = 0$ و خیلی کوچک خارج از محدوده $t = 0$ و با انتکرال برابر با یک.

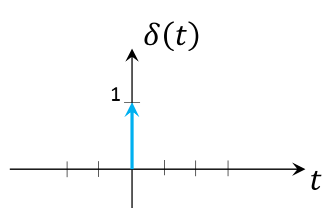


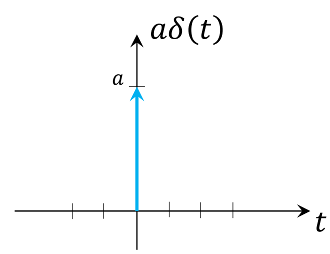
نکته ۲: دلتای دیراک مدل فیزیکی سیگنال‌هایی است که در بازه زمانی کوتاه اثر می‌کنند و اثر آن‌ها به انتگرال سیگنال وابسته است.

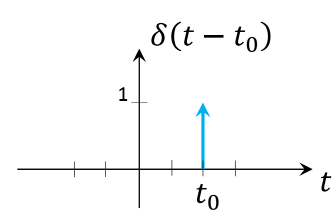
توابع ویژه

تابع ضربه واحد

نکته ۳: ضریب a را در $a\delta(t)$ قدرت یا توان ضربه می‌گویند.





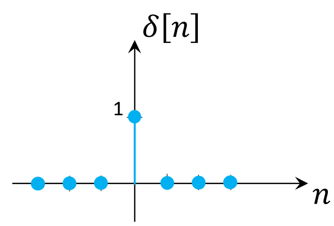


توابع ویژه

تابع ضربه واحد

زمان گسسته :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



ادامه مباحث فصل اول، از روی کتاب و جزوه تدریس خواهد شد.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir