

تکلیف شماره ۱

نام درس: ریاضیات مهندسی

محمدعلی شفیعیان

۱- سری فوریه سینوسی توابع زیر را تعیین کنید:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi/2 \\ 2 & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \begin{cases} x/\alpha & 0 < x < \alpha \\ 1 & -\alpha < x < \alpha \\ (x - \pi)/\alpha & \pi - \alpha < x < \pi \end{cases} \quad \text{ت -}$$

$$f(x) = \cos x \quad 0 < x < \pi \quad \text{پ -}$$

۲- سری فوریه کسینوسی توابع زیر را تعیین کنید:

$$f(x) = \pi + x \quad 0 < x < \pi \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = x \quad 0 < x < \pi \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \sin 3x \quad 0 < x < \pi \quad \text{ت -}$$

۳- سری فوریه توابع زیر را در فاصله‌های داده شده به دست آورید:

$$f(x) = x \quad -1 < x < 1 \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = 1 \quad -2 < x < 2 \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & -1/2 < x < 1/2 \\ 1-x & 1/2 < x < 3/2 \end{cases} \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases} \quad \text{ت -}$$

۴- سری فوریه هر یک از توابع زیر را در دوره تناوب آن‌ها بنویسید:

$$f(x) = \cos^2 x \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \sin x \cos 2x \quad \text{پ -}$$

۵- انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی توابع زیر را تعیین کنید:

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad \text{ب -}$$

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases} \quad \text{پ -}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad \text{ت -}$$

۶- انتگرال فوریه توابع زیر را به دست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & -\pi < x < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases} \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad \text{ب -}$$

۷- با فرض اینکه برای $0 \leq x \leq \pi$ داشته باشیم:

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots \right)$$

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} \right)$$

درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad \text{پ -}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{ب -}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{الف -}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad \text{ث -}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{ت -}$$

۸- درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \sin \omega x}{\omega^4 + 1} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x$$

۹- تبدیل فوریه تابع $f(x) = e^{-a|x|}$ که $a > 0$ را به کمک تعریف تبدیل فوریه به دست آورید.

۱۰- حاصل انتگرال زیر را به کمک تبدیل فوریه و قضیه پارسوال به دست آورید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(9+x^2)^2} dx$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{۱۱-۷ اگر انتگرال فوریه تابع}$$

به صورت زیر تعریف شود:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x d\omega$$

آنگاه حاصل انتگرال زیر را به دست آورید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega}{\omega} d\omega$$

ماضی و مستقبلش نسبت به توست

هر دو یک چیزند، پنداری که دو است

مولانا