

تکلیف شماره ۲

نام درس: ریاضیات مهندسی

محمدعلی شفیعیان

۱- در معادله مختلط $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ مقادیر اعداد حقیقی x و y را به دست آورید.

۲- مقدار عبارت $\frac{i^{36} - i^{27}}{i^{124} - i^{12} + i^5}$ را به دست آورید.

۳- حاصل عبارت $k = \frac{\sqrt{1+z^2} + iz}{z - i\sqrt{1+z^2}}$ را به دست آورید.

۴- برای آنکه اعداد مختلط z و z^2 رئوس یک مثلث متساوی الساقین قائمه الزویه با رأس قائمه در نقطه 1 باشند، چه شرط کافی باید برقرار باشد؟

** راهنمایی: چون مثلث قائم الزویه است، پس بردارهایی که z را به 1 و z^2 را به 1 متصل می کنند باید بر هم عمود باشند یعنی اختلاف زاویه بین این دو بردار برابر با $\frac{\pi}{2}$ باشد، اما چون گفته شده است که مثلث متساوی الساقین است، پس این دو بردار باید اندازه ای برابر نیز داشته باشند.

۵- حاصل عبارت $A = (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ را به دست آورید.

۶- اگر $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $z^n + \frac{1}{z^n}$ چیست؟

۷- حاصل عبارت $\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$ را به دست آورید.

۸- مقدار عبارت $(1+i)^n$ را برای مقادیر فرد و زوج n محاسبه نمایید.

۹- اگر $1+i$ ریشه معادله $z^5 + az^3 + b = 0$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

** راهنمایی: از آنچه در تمرین ۸ به دست آوردید، در تمرین ۹ می توانید استفاده نمایید.

۱۰- حاصل عبارت $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$ را به دست آورید.

۱۱- ریشه سوم عبارت $z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ یعنی $\sqrt[3]{z}$ را به دست آورید.

۱۲- ریشه های معادله $z^4 + z^2 + 1 = 0$ را به دست آورید.

۱۳- جواب معادله $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ چیست؟

۱۴- یکی از جواب‌های معادله $1 - iz - z^2 + iz^3 + z^4 = 0$ به صورت $\cos \alpha + i \sin \alpha$ است. کمترین مقدار α در بازه $[0, 2\pi]$ چیست؟

۱۵- تابع $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ در چه نقاطی تحلیلی است؟

۱۶- نشان دهید اگر $|e^{-iz}| \leq 1$ باشد، آنگاه $y \leq 0$ است.

۱۷- پیوستگی و شرایط کوشی - ریمان را برای تابع زیر بررسی کنید:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(z)^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

۱۸- نشان دهید مکان هندسی نقاطی که در آن، $\frac{|z-1|}{|z+1|} = k$ و $k \neq 1$ است، یک دایره است. در حالت خاص $k = 1$ یا $k = 0$ مکان هندسی چیست؟

۱۹- معادله $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$ معرف کدام شکل هندسی در صفحه z ها است؟

۲۰- اگر داشته باشیم $z = x + iy$ و $w = u + iv$ و $w = \frac{2}{z}$ آنگاه مقدار x را بر حسب u و v به دست آورید.

در جهان بال و پر خویش گشودن آموز

که پریدن نتوان با پر و بال دگران

اقبال لاهوری