سیگنال‌ها و سیستم‌ها

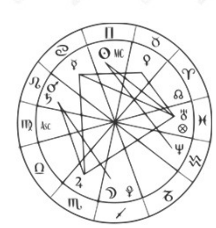
فصل سوم

نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب

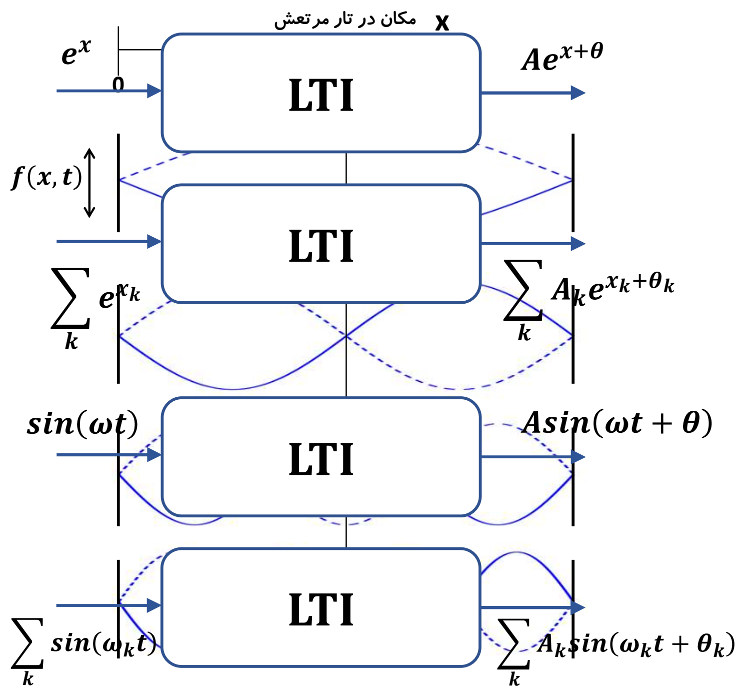
محمدعلی شفیعیان
http://shafieian-education.ir/

تاریخچه سری فوریه

آنالیز فوریه دارای تاریخچه ای طولانی است و افراد بسیاری در توسعه آن نقش داشته‌اند.

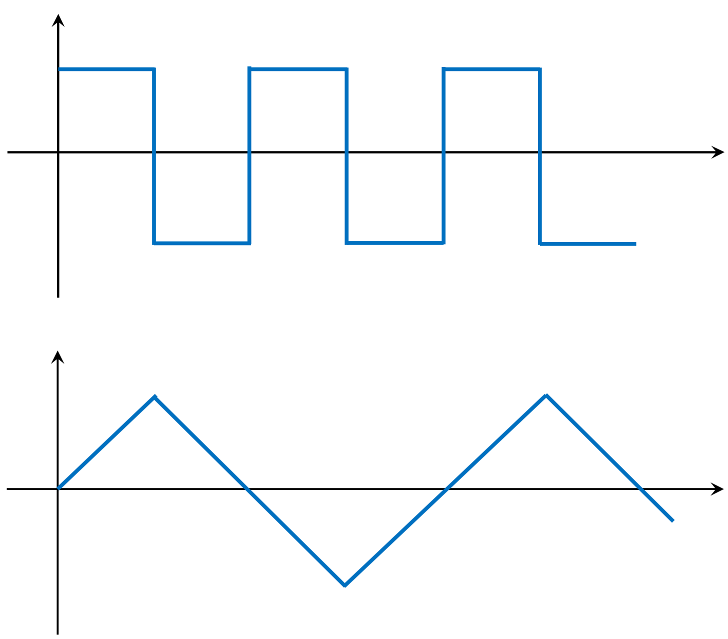


تاریخچه سری فوریه



Leonhard Euler
Mathematician
(1707–1783)

تاریخچه سری فوریه



Joseph-Louis Lagrange / Daniel Bernoulli
Mathematician
(1736–1813) / (1700–1782)

تاریخچه سری فوریه

Jean-Baptiste Joseph Fourier
Innovative Scholar
(March 21, 1768 – May 16, 1830)

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
German Mathematician
(1805–1859)

Georg Friedrich Bernhard Riemann
German Mathematician
(1826–1866)

سری فوریه

- سری فوریه بسطی است که هر تابع متناوب را به‌صورت حاصل جمع تعداد نامتناهی از توابع نوسانی ساده (سینوس، کسینوس یا تابع نمایی مختلط) بیان می کند.
- این تابع به‌نام ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، ژوزف فوریه نام‌گذاری شده است.
- یا بسط هر تابع متناوب به‌صورت سری فوریه، مؤلفه‌های فرکانسی آن تابع به‌دست می‌آید.

سری فوریه

- توابع مورد استفاده در مهندسی و توابع نمایان‌گر سیگنال‌ها معمولاً توابعی از زمان هستند با به‌عبارت دیگر توابعی هستند که در حوزه زمان تعریف شده‌اند.

- برای حل بسیاری از مسائل، بهتر است که تابع در حوزه فرکانس تعریف شده باشد، زیرا این حوزه ویژگی‌هایی دارد که به راحتی محاسبات می‌انجامد.

سری فوریه

- فرض کنید تابعی به شکل زیر تعریف شده است:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$$

N یک عدد صحیح مثبت A_k دامنه

ω_k فرکانس زاویه‌ای $(\omega_k = 2\pi f_k)$ θ_k فاز تابع کسینوسی

- مشاهده می‌شود که با در دست داشتن فرکانس‌های $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$، دامنه‌های $A_1, A_2, \cdots, A_N$ و فازهای $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$ تابع به‌طور کامل قابل تعریف است.

- توجه شود که گفته‌های بالا مستقل از زمان است.

سری فوریه

نمایش‌های مختلف سری فوریه

نمایش مختلط

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

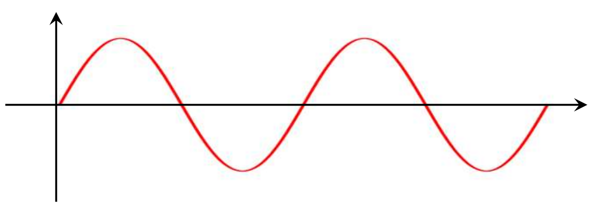
نمایش مثلثاتی

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

نمایش کسینوس با فاز

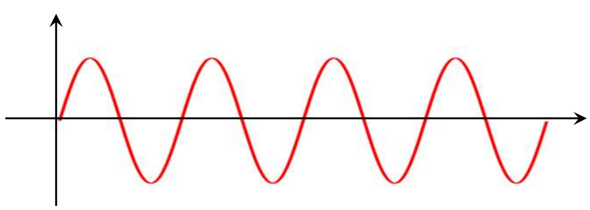
$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k cos(\omega_k t + \theta_k)$$

سری فوریه



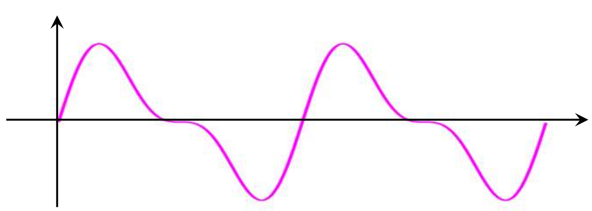
$\sin(x)$

+



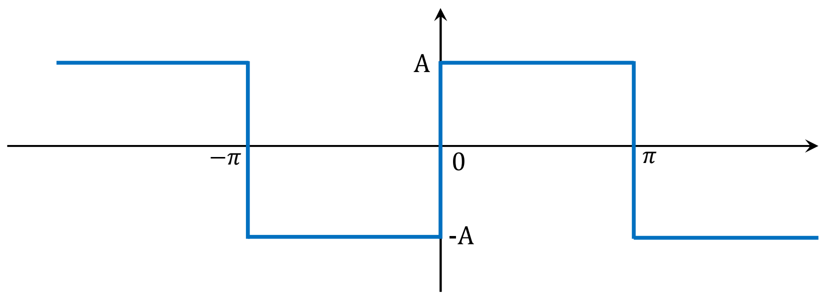
$\sin(2x)$

=

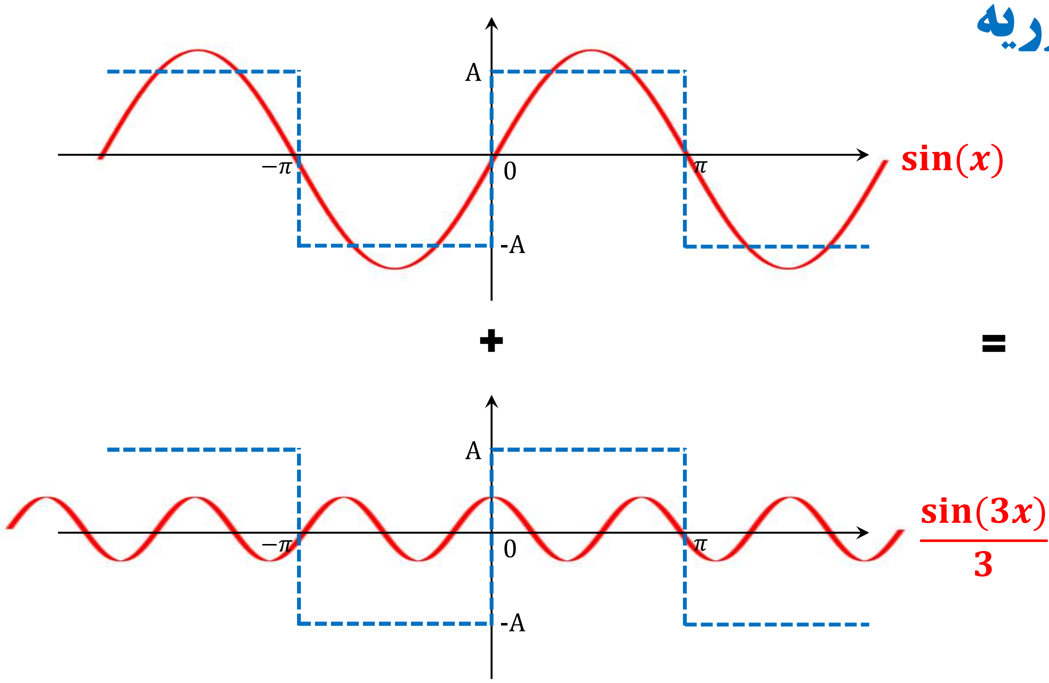


$\sin(x) + \sin(2x)$

سری فوریه

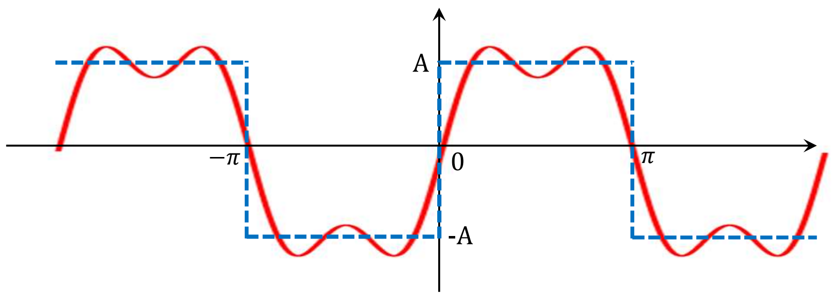


سری فوریه



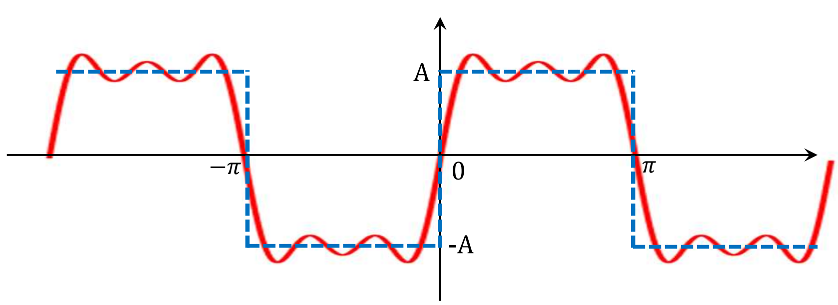
سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3}$$



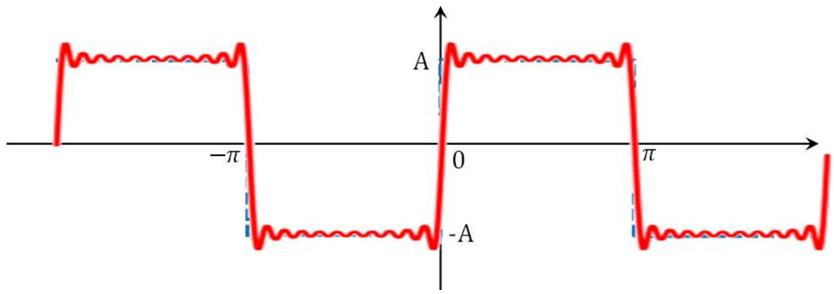
سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5}$$



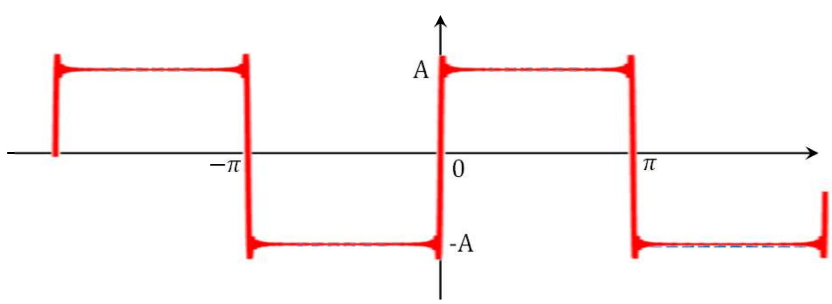
سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots + \frac{\sin(21x)}{21}$$



سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots + \frac{\sin(99x)}{99}$$



نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۱– ترکیب خطی نمایی‌های مختلط هارمونیکی

$x(t) = x(t+T)$ for all t. $\omega_0 = 2\pi/T$

two basic periodic signals,

$$x(t) = \cos\omega_0 t \qquad x(t) = e^{j\omega_0 t}.$$

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۱– ترکیب خطی نمایی‌های مختلط هارمونیکی

set of *harmonically related* complex exponentials

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۱– ترکیب خطی نمایی‌های مختلط هارمونیکی

مثال:

Consider a periodic signal $x(t)$, with fundamental frequency 2π, that is expressed

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t},$$

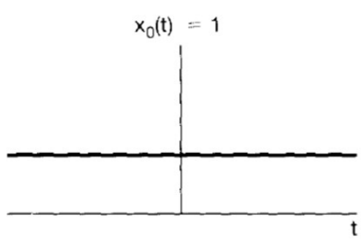
where

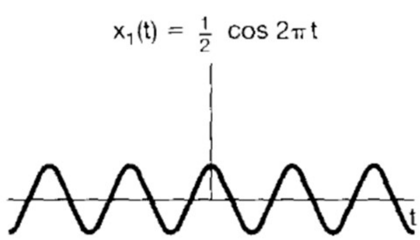
$$a_0 = 1, \qquad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \qquad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

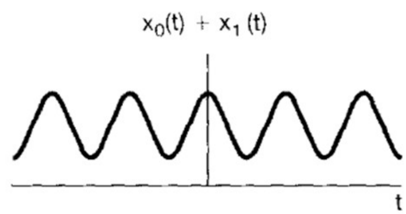
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

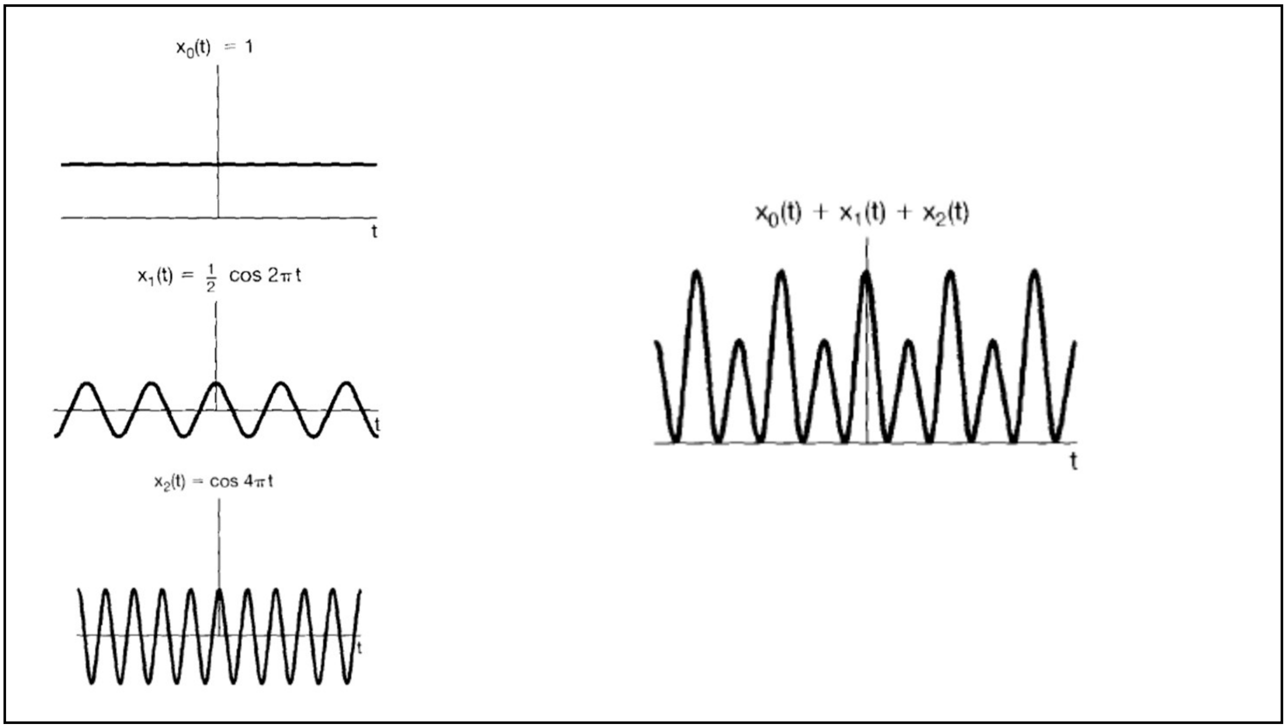
$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t.$$

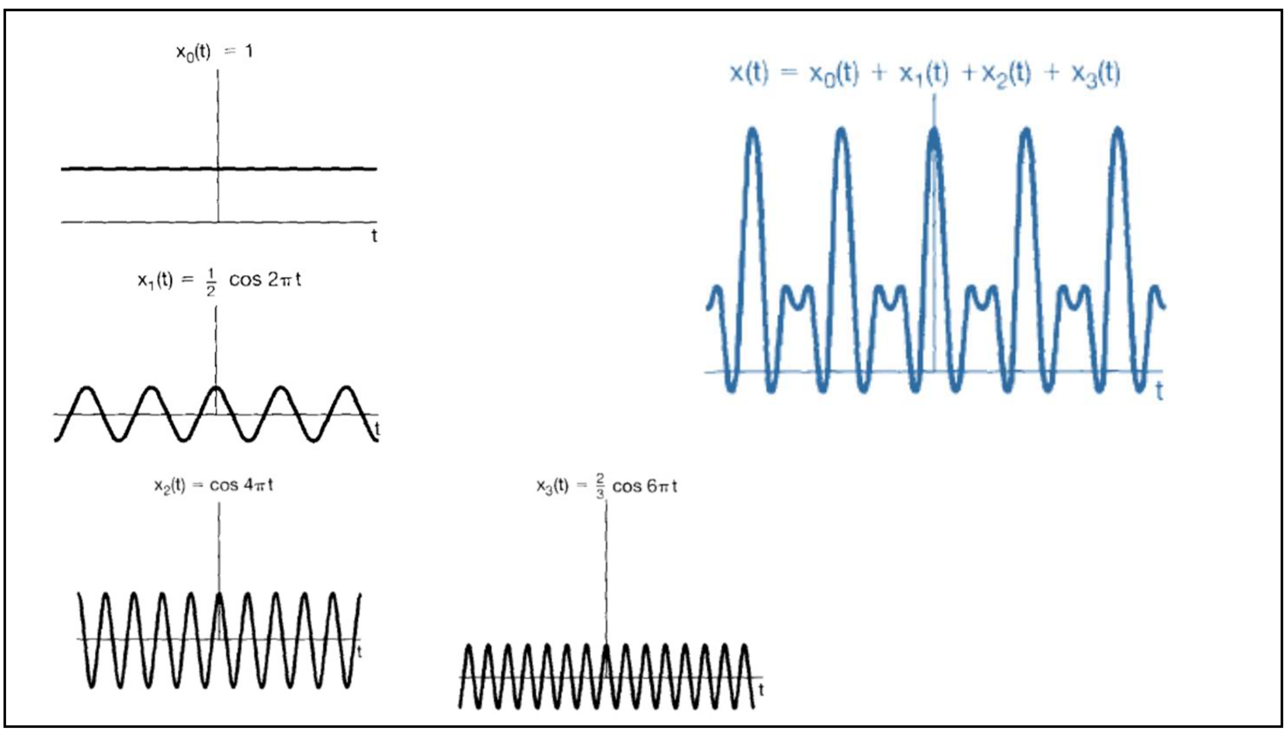








$x_0(t) = 1$
$x_1(t) = \frac{1}{2} \cos 2\pi t$
$x_2(t) = \cos 4\pi t$
$x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$
t



$x_0(t) = 1$
$x_1(t) = \frac{1}{2} \cos 2\pi t$
$x_2(t) = \cos 4\pi t$
$x_3(t) = \frac{2}{3} \cos 6\pi t$
$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$
t

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

اگر سیگنال $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد، می‌توان $x(t)$ را به‌صورت ترکیب خطی $e^{j\omega_0 t}$ (که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است) و هارمونیک‌های سیگنال $e^{jk\omega_0 t}$ نوشت.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t},$$

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt.$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

مثال:

$$x(t) = \sin\omega_0 t,$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}.$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$

$$a_k = 0, \qquad k \neq +1 \text{ or } -1$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

مثال:

$$x(t) = 1 + \sin\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}]$$

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}.$$

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}.$$

$$a_0 = 1,$$

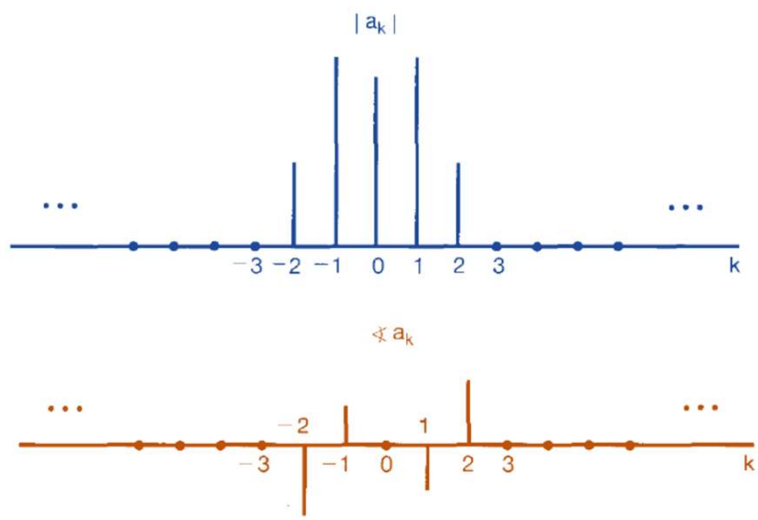
$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j,$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j),$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j),$$

$$a_k = 0, \ |k| > 2.$$



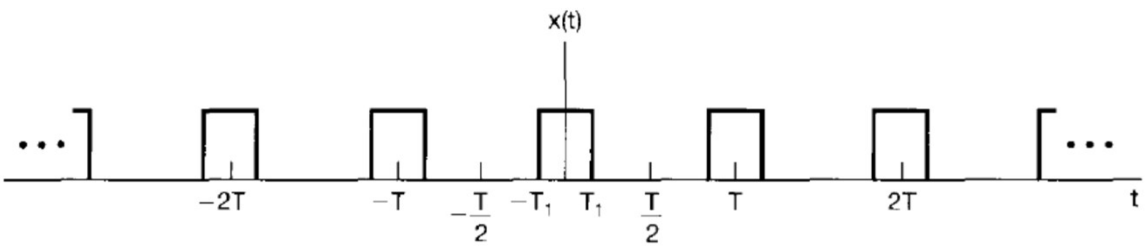
نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

مثال:

The periodic square wave,

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}.$$

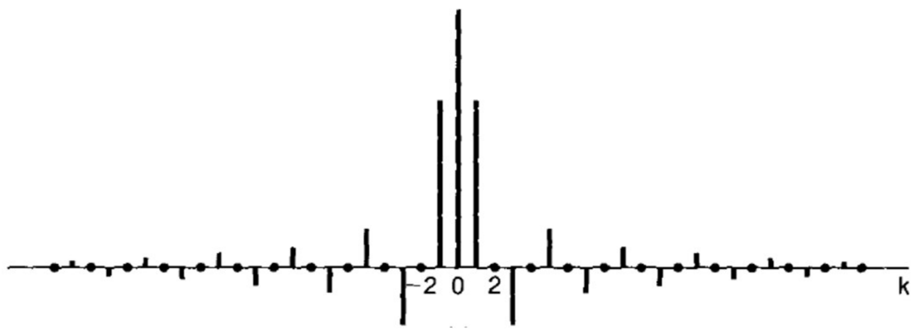
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right].$$

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0, \qquad \omega_0 T = 2\pi.$$

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0,$$

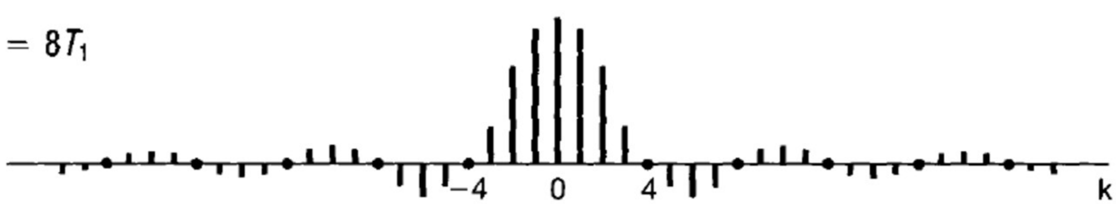
$$T = 4T_1 \qquad \omega_0 T_1 = \pi/2, \qquad a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \quad a_{-1} = \frac{1}{\pi}, \qquad a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}, \qquad a_5 = \quad a_{-5} = \frac{1}{5\pi},$$

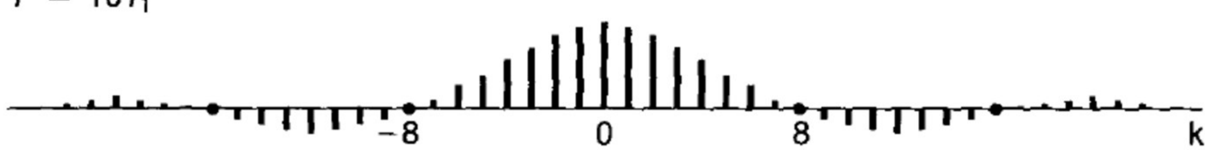


$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0,$$

$T = 8T_1$



$T = 16T_1$



نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۳– همگرایی سری فوریه

همگرایی سری فوریه معمولاً به دو شکل مطرح می‌شود:

الف) همگرایی در مفهوم میانگین مربعات خطا

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

انرژی خطای تقریب در یک دوره تناوب = میانگین مربعات خطا

$$E_N = \int_T |x_N(t) - x(t)|^2 \, dt$$

برای همگرایی لازم است که: $\lim_{N\to\infty} E_N = 0$

اگر سیگنال $x(t)$ در یک دوره تناوب انرژی محدود داشته باشد، یعنی اگر $\int_T |x(t)|^2 \, dt < \infty$ باشد، آنگاه $\lim_{N\to\infty} E_N = 0$ است و سری همگراست.

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۳– همگرایی سری فوریه

الف) همگرایی در مفهوم میانگین مربعات خطا

تذکر: اینکه $E_N = 0$ باشد به این معنی نیست که $x_N(t)$ به ازای تمام tها با $x(t)$ برابر است؛ بلکه به این مفهوم است که تفاوت این دو سیگنال یعنی خطای تقریب انرژی صفر دارد بطوریکه برای سیستم‌های فیزیکی $x_N(t)$ از $x(t)$ قابل تشخیص نیست.

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۳– همگرایی سری فوریه

ب) همگرایی در مفهوم نقطه‌ای (شرایط دیریکله)

۱. سیگنال $x(t)$ در یک دوره تناوب انتگرال‌پذیر مطلق باشد یعنی $\int_T x(t)\,dt < \infty$

۲. سیگنال $x(t)$ در یک دوره تناوب تعداد محدودی اکستریمم داشته باشد.

۳. سیگنال $x(t)$ در یک دوره تناوب تعداد محدودی ناپیوستگی داشته باشد.

در صورتی که شرایط بالا (شرایط دیریکله) محقق شود، سیگنال $x(t)$ در نقاط پیوستگی با نمایش سری فوریه آن برابر است:

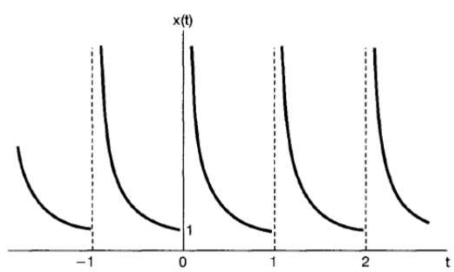
$$\lim_{N\to\infty} x_N(t) = x(t)$$

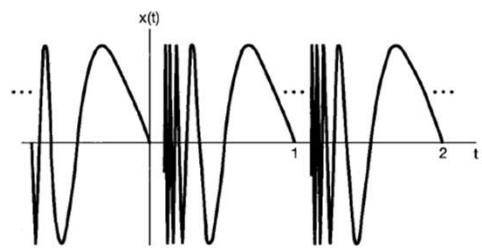
سیگنال $x(t)$ در نقاط ناپیوستگی t_d برابر با میانگین حد چپ و راست ناپیوستگی خواهد بود:

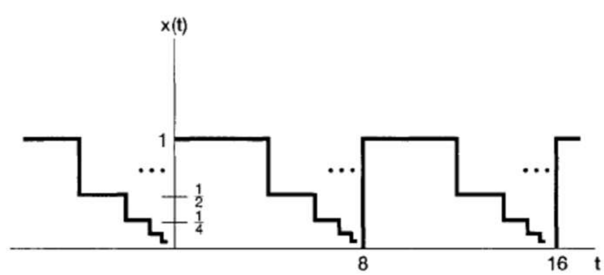
$$x_N(t_d) = \frac{f({t_d}^{+}) + f({t_d}^{-})}{2}$$

۳– همگرایی سری فوریه

ب) همگرایی در مفهوم نقطه‌ای (شرایط دیریکله)







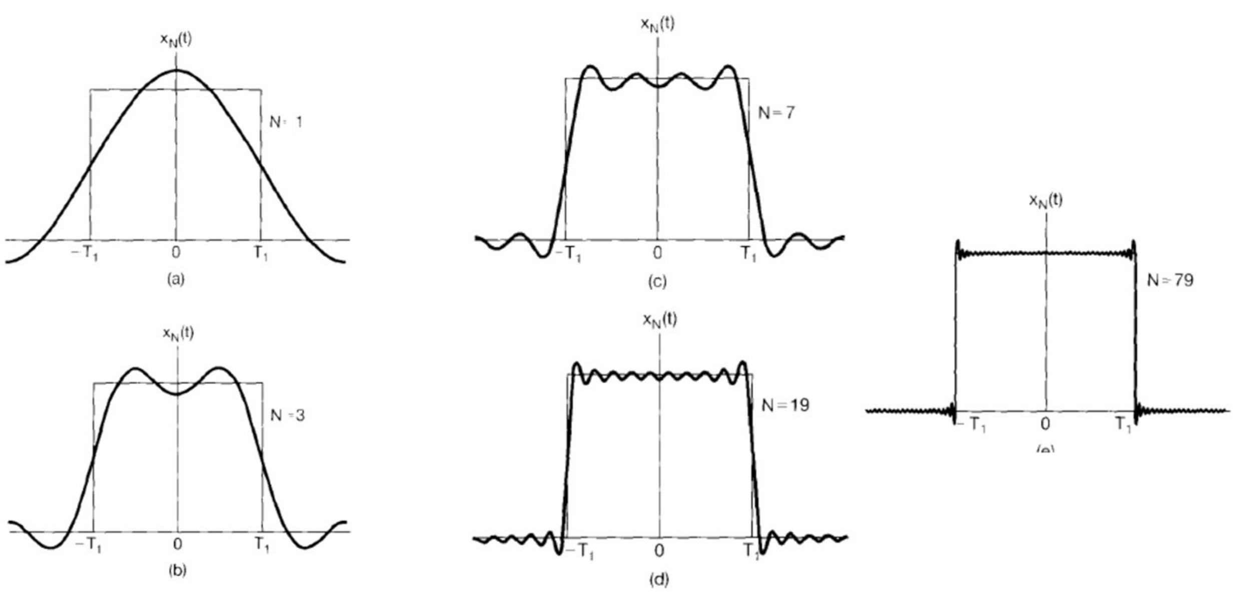
نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۳– همگرایی سری فوریه

ب) همگرایی در مفهوم نقطه‌ای (شرایط دیریکله)

تذکر۱: ناپیوستگی در سیگنال متناوب $x(t)$ متناظر با تعداد نامتناهی ضرایب سری فوریه است.

تذکر۲: رفتار سیگنال $x(t)$ و نمایش سری فوریه آن تحت کانولوشن یکسان است و این دو از نظر تحلیل سیستم‌های LTI یکسان هستند.



۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۱) خطی بودن

$x(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$
$y(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} b_k.$ ➡ $z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k.$

۲) شیفت زمانی

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ ➡ $x(t - t_0) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$

۳) قرینگی زمانی

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ ➡

- اگر $x(t)$ زوج باشد : $x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$
- اگر $x(t)$ فرد باشد : $x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} -a_{-k}\ , a_0 = 0$

۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۴) مقیاس‌دهی زمانی

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ ➡ $x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$

۵) ضرب دو سیگنال

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$
$y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$ ➡ $x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$ کانولوشن زمان گسسته ضرایب :

۶) تقارن Hermitian

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ ➡ $x^*(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$

۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

۷) انتقال ضرایب

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \quad \Rightarrow \quad e^{jm\ {}_0t}x(t) \xleftrightarrow{FS} a_{k-m}$$

۸) کانولوشن متناوب

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$
$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k \quad \Rightarrow \quad \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \xleftrightarrow{FS} Ta_kb_k$$

۹) رابطه پارسوال

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \quad \Rightarrow \quad \int_T |x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

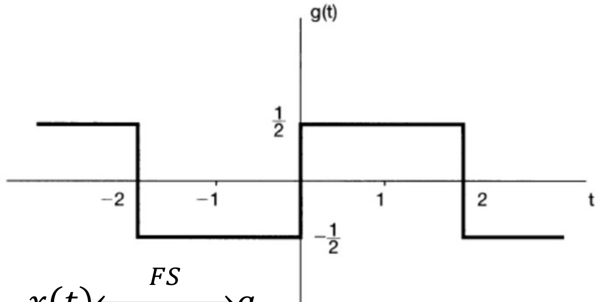
Property	Section	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
		$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ Periodic with period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_ke^{-jk\omega_0t_0} = a_ke^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0t} = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	Ta_kb_k
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_lb_{k-l}$
Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	3.5.6	$x(t)$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	3.5.6	$x(t)$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

مثال:



$$g(t) = x(t-1) - 1/2.$$

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$g(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} d_k$$

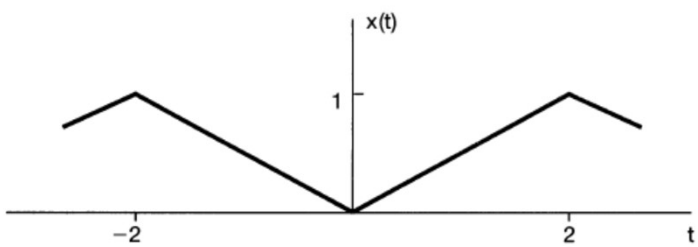
$$\Rightarrow \quad x(t-1) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{for } k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ 0, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

مثال:



$$g(t) = x(t-1) - 1/2.$$

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} e_k$$

$$g(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} d_k$$

$$\Rightarrow \quad d_k = jk(\pi/2)e_k$$

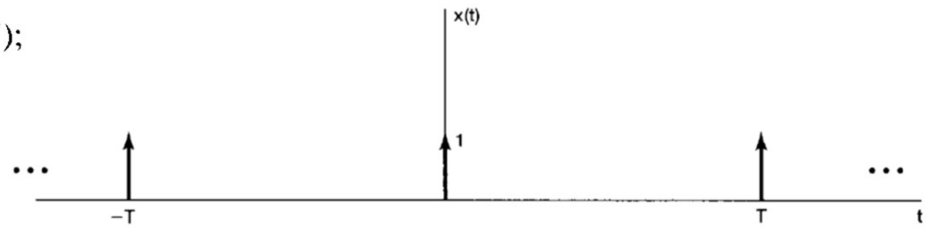
$$e_k = \frac{2d_k}{jk\pi} = \frac{2\sin(\pi k/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}, \qquad k \neq 0.$$

$$e_0 = \frac{1}{2}.$$

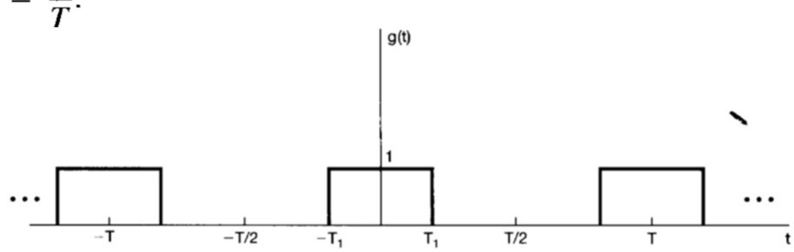
۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

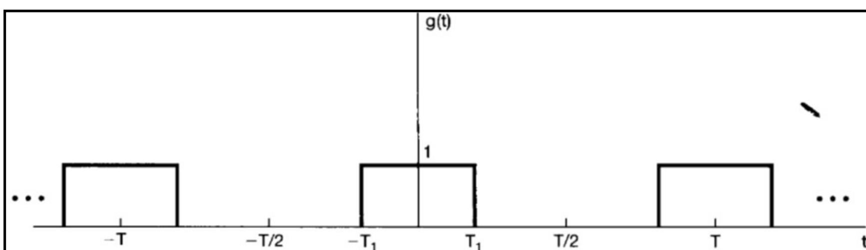
مثال:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT);$$



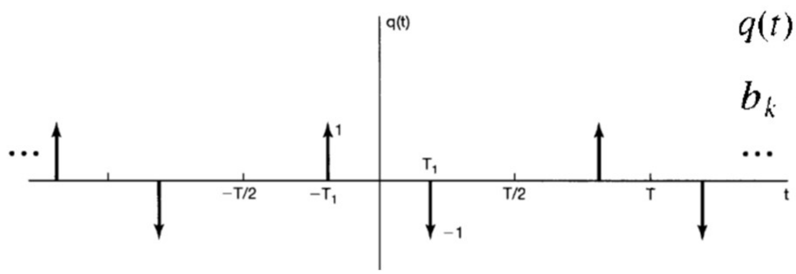
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk2\pi t/T} dt = \frac{1}{T}.$$





$$q(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1).$$

$$b_k = e^{jk\omega_0 T_1} a_k - e^{-jk\omega_0 T_1} a_k,$$



$$b_k = \frac{1}{T}[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}] = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{T}$$

$$b_k = jk\omega_0 c_k \qquad c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0,$$

۴– خواص سری فوریه سیگنالهای زمان پیوسته متناوب

مثال:

Suppose we are given the following facts about a signal $x(t)$:

1. $x(t)$ is a real signal.
2. $x(t)$ is periodic with period $T = 4$, and it has Fourier series coefficients a_k.
3. $a_k = 0$ for $|k| > 1$.
4. The signal with Fourier coefficients $b_k = e^{-j\pi k/2} a_{-k}$ is odd.
5. $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = 1/2$.

$$\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2 \qquad x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + a_{-1} e^{-j\pi t/2}.$$

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + (a_1 e^{j\pi t/2})^* = a_0 + 2\Re e\{a_1 e^{j\pi t/2}\}$$

$$\frac{1}{4}\int_4 |x(-t+1)|^2 dt = 1/2. \qquad |b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = 1/2$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۱– ترکیب‌های خطی از نمایی‌های مختلط

a discrete-time signal $x[n]$ is periodic with period N if

$$x[n] = x[n+N].$$

the set of all discrete-time complex exponential signals that are periodic with period N is given by

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۱– نمایش سری فوریه

اگر سیگنال $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی N باشد، می‌توان $x[n]$ را به‌صورت ترکیب خطی $e^{j\omega_0 n}$ (که $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ است) و هارمونیک‌های سیگنال $e^{jk\omega_0 n}$ نوشت.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

موارد تفاوت با ضرایب سری فوریه زمان پیوسته

سری فوریه زمان گسسته محدود است یعنی حداکثر از N جمله تشکیل شده است.

سری فوریه زمان گسسته هیچ مشکل همگرایی ندارد و همواره موجود است.

ضرایب سری فوریه زمان گسسته نیز متناوب با تناوب اصلی N هستند به‌طوری‌که:

$$a_k = a_{k+N}$$

تعریف: مجموعه ضرایب $a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ را معمولاً تبدیل فوریه گسسته N نقطه‌ای (**DFT**) متناظر با سیگنال با طول محدود $x[n]$ که $x[n]$ خارج از بازه $0 \le n \le N-1$ صفر است، می‌نامند.

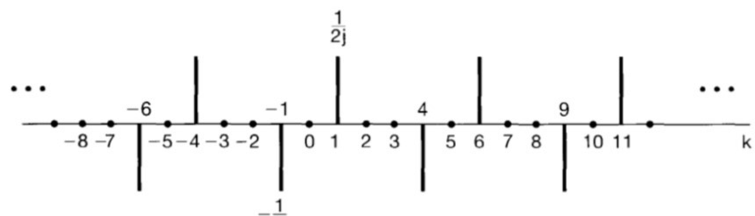
نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

مثال:

$$x[n] = \sin \omega_0 n, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N},$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n}. \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j},$$



نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

مثال:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{3}{2}[e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}]$$

$$+ \frac{1}{2}[e^{j(4\pi n/N + \pi/2)} + e^{-j(4\pi n/N + \pi/2)}].$$

$$x[n] = 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}e^{j\pi/2}\right)e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}\right)e^{-j2(2\pi/N)n}.$$

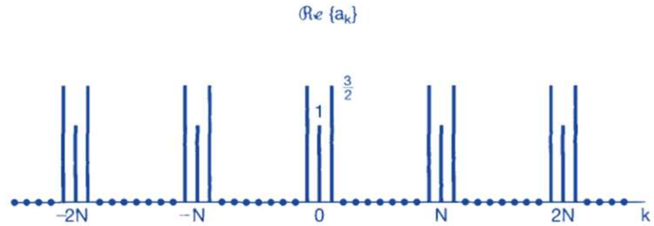
$$a_0 = 1,$$

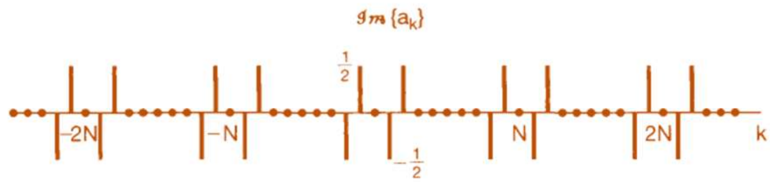
$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j,$$

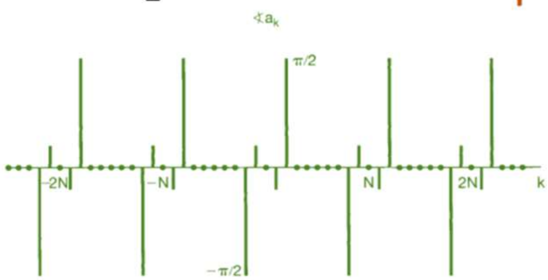
$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j,$$

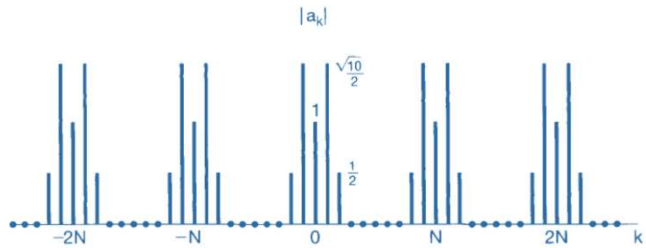
$$a_2 = \frac{1}{2}j,$$

$$a_{-2} = -\frac{1}{2}j,$$





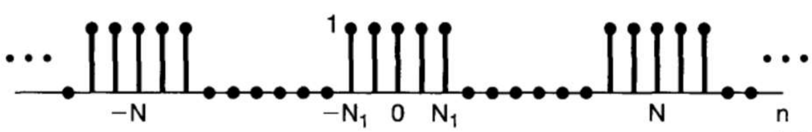




نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۲– نمایش سری فوریه

مثال:



$$x[n] = 1 \text{ for } -N_1 \le n \le N_1,$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

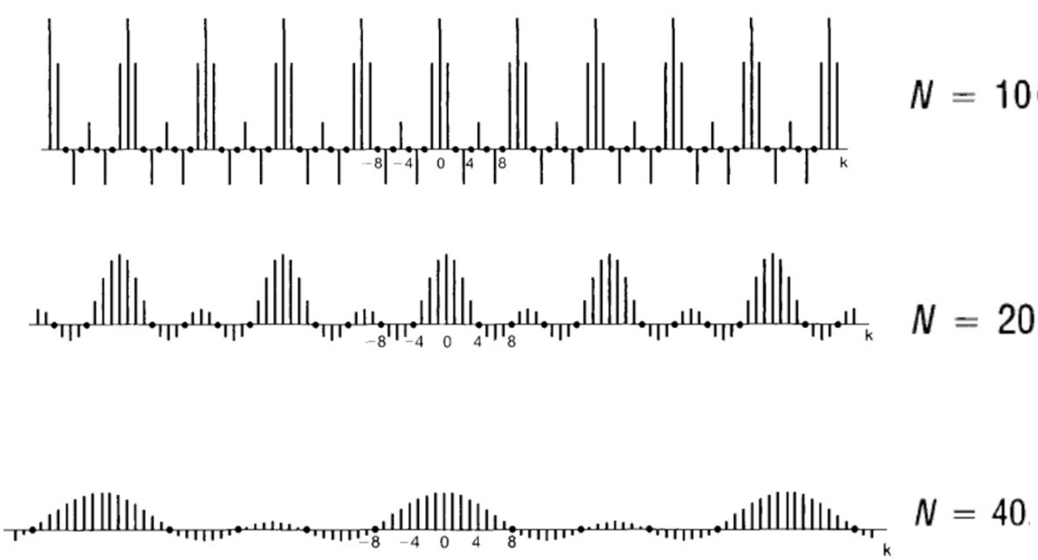
$$m = n + N_1, \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}.$$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)}[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

plots of Na_k for $2N_1 + 1 = 5$



نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۳– خواص سری فوریه

Property	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
	$\left.\begin{array}{l} x[n] \\ y[n] \end{array}\right\}$ Periodic with period N and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/N$	$\left.\begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array}\right\}$ Periodic with period N
Linearity	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frequency Shifting	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugation	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Time Reversal	$x[-n]$	a_{-k}
Time Scaling	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m} a_k \begin{pmatrix} \text{viewed as periodic} \\ \text{with period } mN \end{pmatrix}$
Periodic Convolution	$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$
First Difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
Running Sum	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \begin{pmatrix} \text{finite valued and periodic only} \\ \text{if } a_0 = 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})}\right)a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	$x[n]$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	$x[n]$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۳– خواص سری فوریه

خاصیت ضرب

$$x[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$y[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$$

$$x[n]y[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} d_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}.$$

تفاضل مرتبه اول

$$x[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

$$x[n] - x[n-1] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k,$$

تساوی پارسوال

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2,$$

نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۳– خواص سری فوریه

خاصیت تغییر مقیاس

اگر سیگنال $x[n]$ یک سیگنال متناوب گسسته با دوره تناوب اصلی N و ضرایب سری فوریه a_k باشد، آنگاه

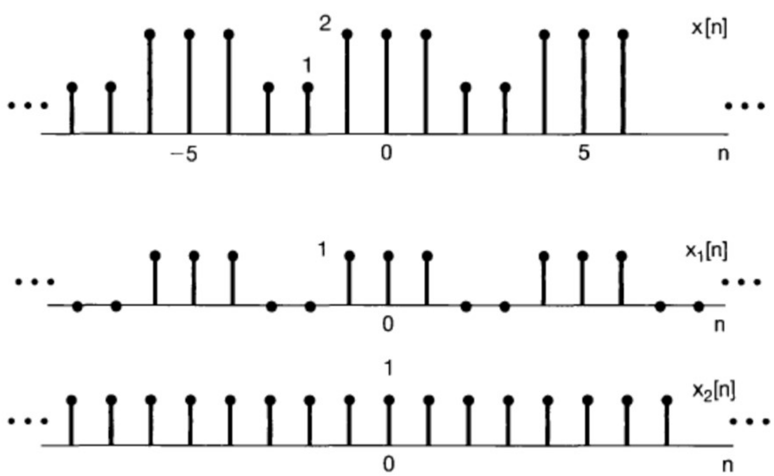
$x\left[\frac{n}{m}\right]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب mN و ضرایب سری فوریه $\frac{1}{m}a_k$ است

$$x_m[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & \text{اگر } n \text{ مضرب صحیح } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \quad \overset{FS}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{m}a_k$$

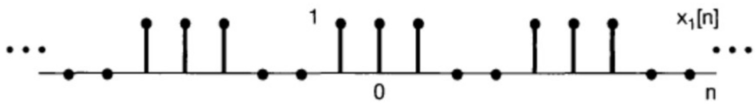
نمایش سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته متناوب

۳– خواص سری فوریه

مثال:



$$a_k = b_k + c_k.$$



$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & \text{for } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ \dfrac{3}{5}, & \text{for } k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \end{cases}.$$

$$c_0 = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x_2[n] = 1.$$

$$a_k = b_k + c_k. \quad \Rightarrow \quad a_k = \begin{cases} b_k = \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & \text{for } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ \dfrac{8}{5}, & \text{for } k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \end{cases}.$$

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir