

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

فصل چهارم

تبدیل فوریه زمان پیوسته

محمدعلی شفیعیان

<http://shafieian-education.ir/>

تبدیل فوریه

سری فوریه ابزاری قدرتمند برای تجزیه و تحلیل **سیگنال‌های متناوب** است ولی در مورد سیگنال‌های **نامتناوب** کاربردی ندارد و لذا بحث **تبدیل فوریه** پیش می‌آید.

****** تبدیل فوریه در مورد سیگنال‌های متناوب نیز تعریف می‌شود اما اطلاعات بیشتری نسبت به سری فوریه در اختیارمان نمی‌گذارد

ایده اصلی برای تعریف تبدیل فوریه به منظور تحلیل فرکانسی سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان پیوسته از آنجا گرفته شده است که یک سیگنال نامتناوب را می‌توان به صورت سیگنال متناوب با **دوره تناوب** **بینهایت** در نظر گرفت و از تعاریف و مفاهیم سری فوریه کمک گرفت تا به تبدیل فوریه دست یابیم.

تبدیل فوریه

روابط تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{تبدیل فوریه : } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt & \Rightarrow \begin{array}{l} \text{روشی برای بیان سیگنال } x(t) \\ \text{در حوزه فرکانس} \end{array} \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega & \Rightarrow \begin{array}{l} \text{روشی برای بیان سیگنال} \\ \text{از حوزه فرکانس به حوزه زمان} \end{array} \end{array} \right.$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \Rightarrow X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \text{ و } x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

نکته: تبدیل فوریه را گاهی اوقات، **انتگرال فوریه** یا **طیف سیگنال** نیز می نامند.

همگرایی تبدیل فوریه

مشابه با سری فوریه زمان پیوسته، همگرایی تبدیل فوریه در دو مفهوم و با دو دسته شرایط مطرح است.

شرط محدودیت انرژی

برای سیگنال‌های با انرژی محدود ($\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$) تبدیل فوریه $X(j\omega)$ محدود است و انرژی خطا برابر صفر است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(t) - x(t)|^2 dt = 0$$

همگرایی تبدیل فوریه

شرایط دیریکله

اگر شرایط زیر برای سیگنال $x(t)$ برقرار باشد:

✓ اگر سیگنال $x(t)$ انتگرال پذیر مطلق باشد $(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty)$.

✓ تعداد محدودی اکستریم در هر بازه با طول محدود داشته باشد

✓ تعداد محدودی نقاط ناپیوستگی متناهی در هر بازه با طول محدود داشته باشد

آنگاه $\hat{x}(t)$ (تبدیل فوریه معکوس) به جز در نقاط ناپیوستگی با $x(t)$ برابر است و در نقاط ناپیوستگی

برابر با متوسط حد چپ و راست نقطه ناپیوستگی است:

$$\hat{x}(t_d) = \frac{x(t_d^+) + x(t_d^-)}{2}$$

همگرایی تبدیل فوریه

شرایط دیریکله

تذکر: شرایط بیان شده وجود تبدیل فوریه را تضمین می کنند. لیکن سیگنال هایی وجود دارند

که این شرایط را برآورده نمی کنند و در عین حال تبدیل فوریه دارند مانند سیگنال های

متناوب؛ لذا این شرایط شروط کافی هستند نه لازم.

تبدیل فوریه

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a > 0.$$

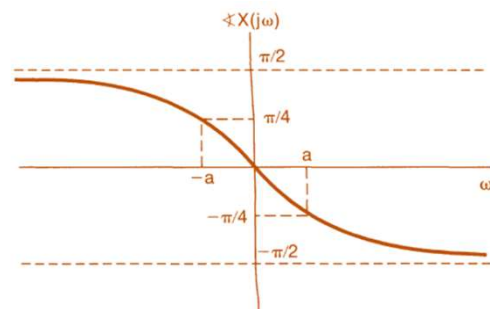
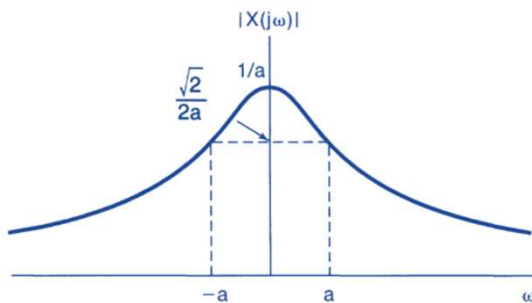
$$\text{تبدیل فوریه: } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0.$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad \Re\{a\} > 0.$$

?

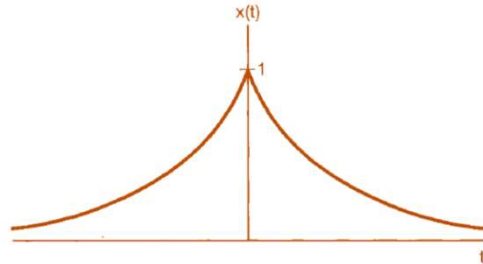


تبدیل فوریه

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

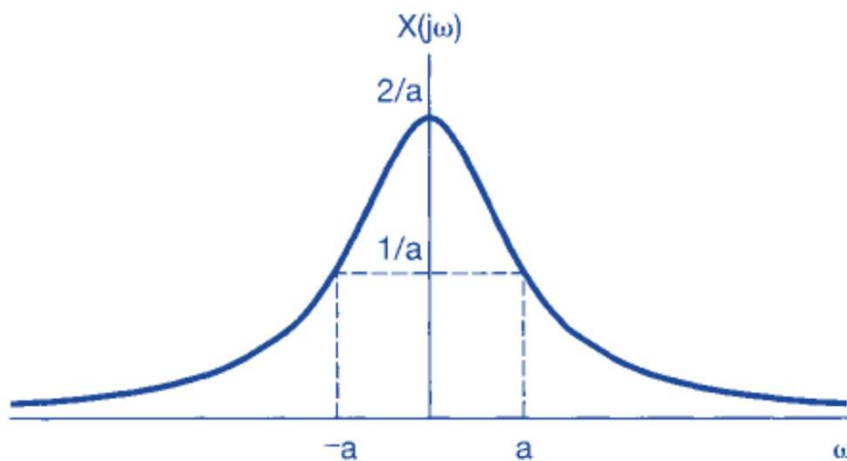
$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0.$$

تبدیل فوریه : $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$



$$\begin{aligned} \Rightarrow X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$



تبدیل فوریه

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x(t) = \delta(t).$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

تبدیل فوریه : $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1.$

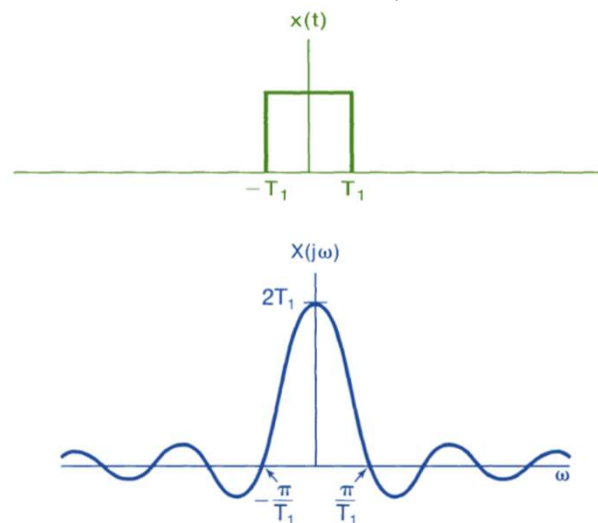
تبدیل فوریه

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega},$$



تبدیل فوریه

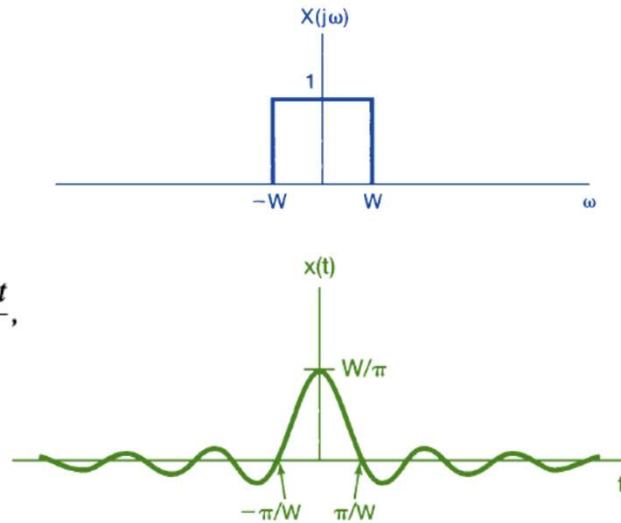
مثال: عکس تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t},$$

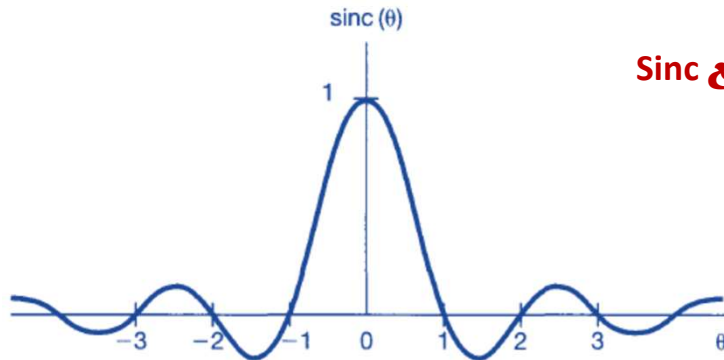
خاصیت دوگانی



تبدیل فوریه

Sinc تابع

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta}.$$

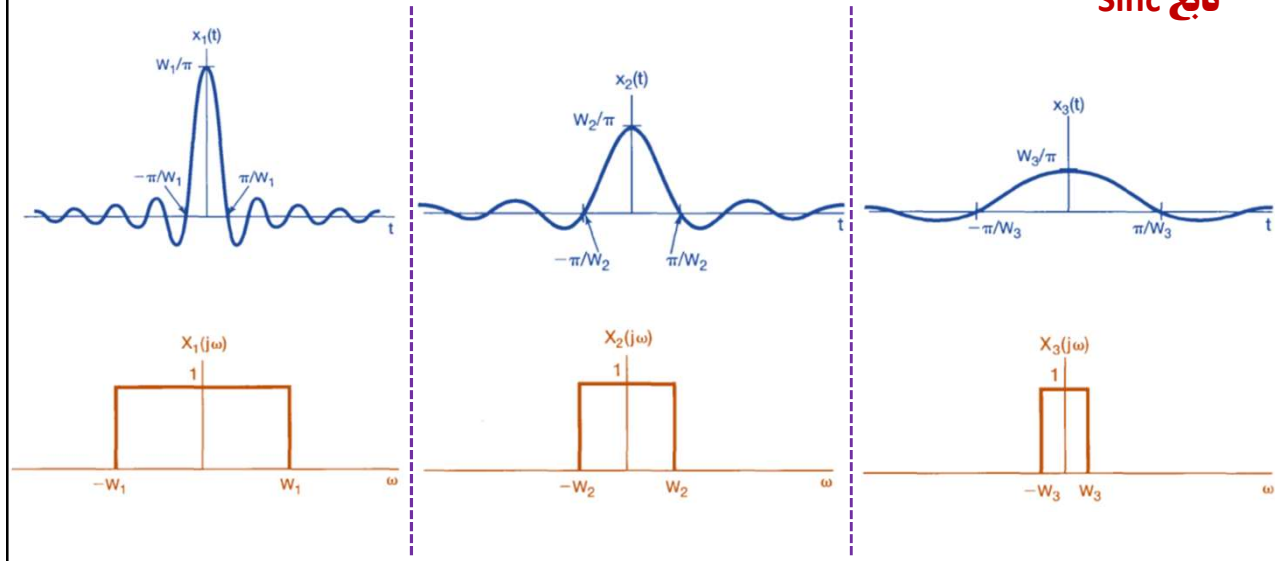


در دو مثال قبل: $X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}, \Rightarrow \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$

در مثال قبل: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t}, \Rightarrow \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right).$

تبدیل فوریه

تابع Sinc



تبدیل فوریه

مثال: نشان دهید:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= e^{j\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) d\omega}_{1} = e^{j\omega_0 t}$$

تبدیل فوریه برای سیگنال‌های متناوب

دقت کنید که سیگنال‌های متناوب شرط کافی برای همگرایی را ندارند ولی تبدیل فوریه دارند در حالت کلی:

$$x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

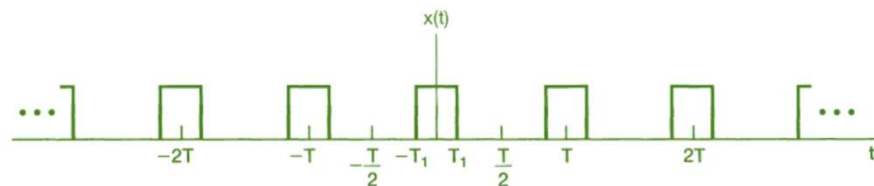
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

تبدیل فوریه برای سیگنال‌های متناوب

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال نشان داده شده در شکل زیر برابر است با:

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

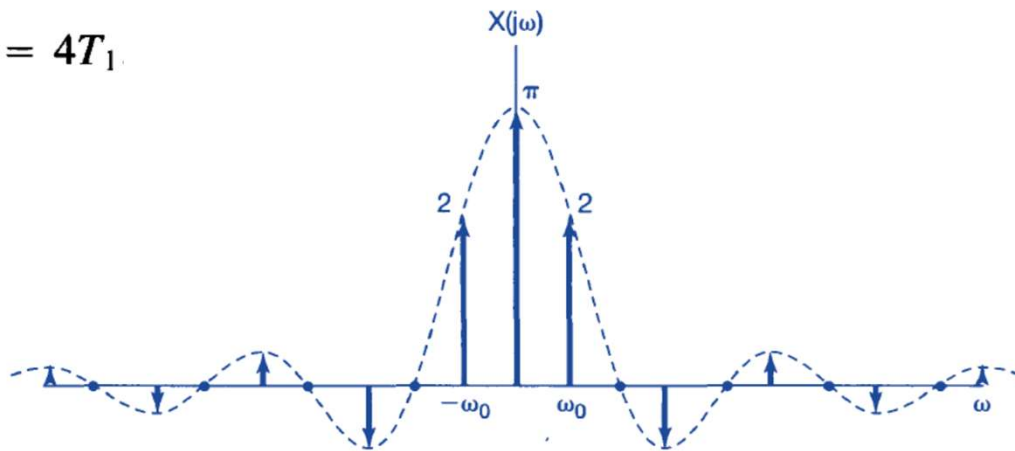


تبدیل فوریه سیگنال را به دست آورید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0),$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0),$$

$$T = 4T_1$$



تبدیل فوریه

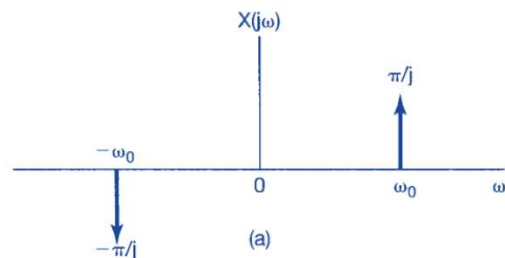
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

ضرایب سری فوریه برای سیگنال $x(t) = \sin \omega_0 t$:

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, \quad k \neq 1 \text{ or } -1.$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{2j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{2\pi}{2j} \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$



تبدیل فوریه

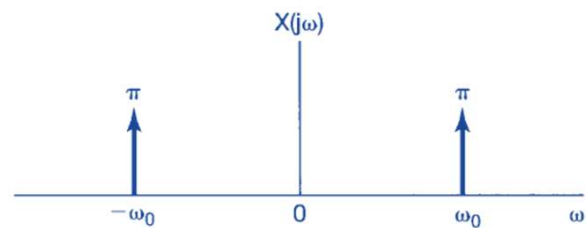
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

ضرایب سری فوریه برای سیگنال $x(t) = \cos \omega_0 t$:

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad a_k = 0, \quad k \neq 1 \text{ or } -1.$$

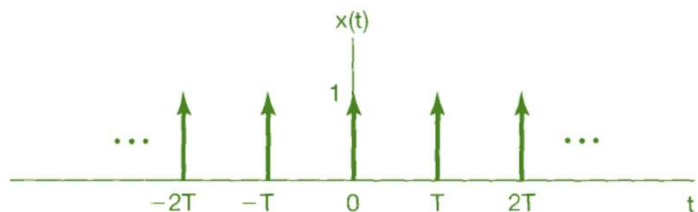
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$



تبدیل فوریه

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

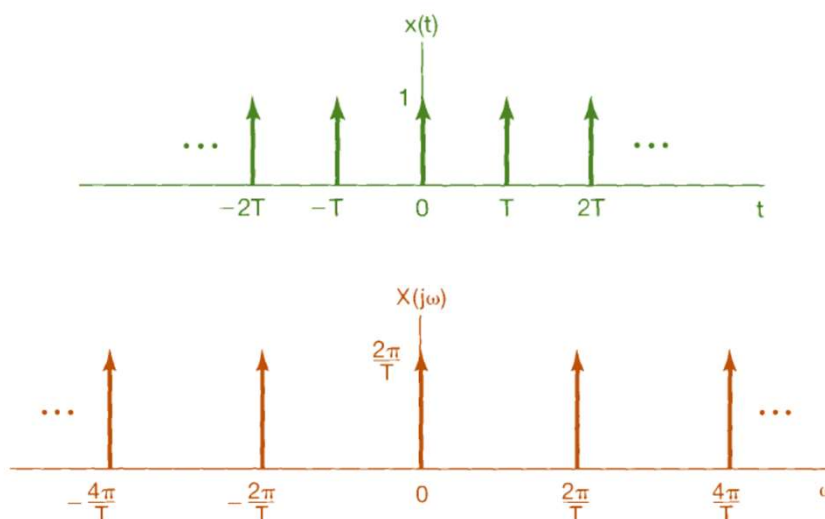
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT),$$



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT), \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$



خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت خطی بودن:

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \\ y(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega), \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

خاصیت شیفت زمانی:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow x(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \right) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \end{aligned}$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت شیفت زمانی:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \Rightarrow x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]}$$

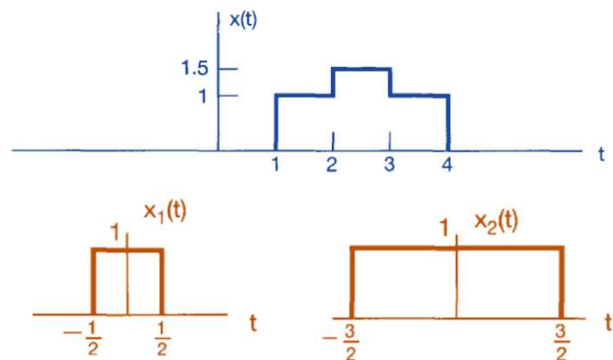
خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال: (کاربرد خاصیت‌های خطی بودن و شیفت زمانی)

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t - 2.5) + x_2(t - 2.5),$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega) = \frac{2 \sin(3\omega/2)}{\omega}$$



$$\text{خاصیت شیفت زمانی: } X(j\omega) = e^{-j5\omega/2} \left\{ \frac{\sin(\omega/2) + 2 \sin(3\omega/2)}{\omega} \right\}$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت مزدوج و تقارن مزدوج:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\omega)$$

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt. \quad \Rightarrow \quad X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt.$$

if $x(t)$ is real, $\Rightarrow X(j\omega)$ has *conjugate symmetry*; $\Rightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ [x(t) real]

$$X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} + j\Im\{X(j\omega)\}, \quad \begin{cases} \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \text{real part of the Fourier transform is an even function of frequency.} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\}. \\ \text{imaginary part is an odd function of frequency.} \end{cases}$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت مزدوج و تقارن مزدوج:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t). \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_e(t)\} + \mathcal{F}\{x_o(t)\},$$

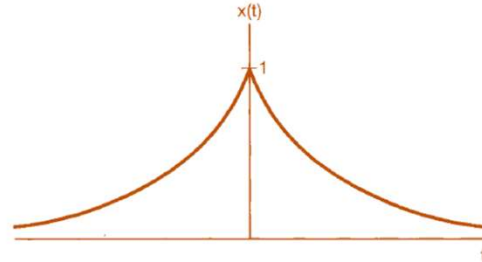
$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{E}\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(j\omega)\}, \\ \mathcal{O}\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Im\{X(j\omega)\}. \end{cases}$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال: با استفاده از خواص، تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0.$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega}.$$



$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2 \left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \right] = 2\mathcal{E}_v\{e^{-at}u(t)\}.$$

$$e^{-at}u(t) \text{ is real} \Rightarrow \mathcal{E}_v\{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\} \Rightarrow X(j\omega) = 2\Re\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت مشتق گیری و انتگرال گیری:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega).$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega).$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال: با استفاده از خواص، تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x(t) = u(t)$$

$$g(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 1.$$

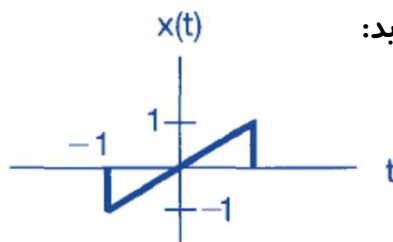
$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \Rightarrow X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega),$$

$$\xrightarrow{G(j\omega) = 1} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).$$

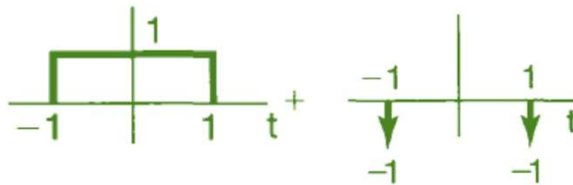
$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1,$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال: با استفاده از خواص، تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:



$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t). \Rightarrow$$



$$G(j\omega) = \left(\frac{2 \sin \omega}{\omega} \right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega).$$

$$\xrightarrow{G(0) = 0} X(j\omega) = \frac{2 \sin \omega}{j\omega^2} - \frac{2 \cos \omega}{j\omega}$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مقیاس دهی زمانی و فرکانسی:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right),$$

$$a = -1 \quad \Rightarrow \quad x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega).$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

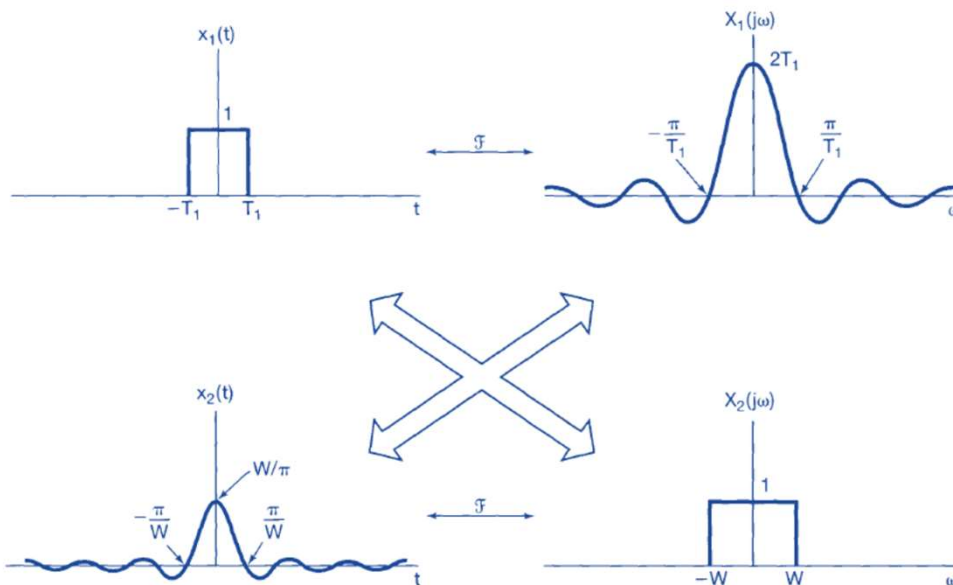
خاصیت دوگانگی:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت دوگانی:



خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال: با استفاده از خاصیت دوگانی، تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

$$X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}, \quad x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{j\omega t} d\omega. \Rightarrow 2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{-j\omega t} d\omega.$$

$$2\pi e^{-|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+t^2} \right) e^{-j\omega t} dt. \Rightarrow \mathcal{F} \left\{ \frac{2}{1+t^2} \right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت دوگانی:

نکته:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{-jtx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}} \quad \boxed{e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega - \omega_0))}$$

$$\boxed{-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\omega} x(\eta)d\eta.}$$

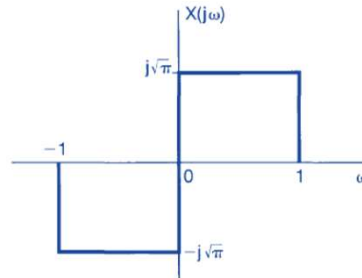
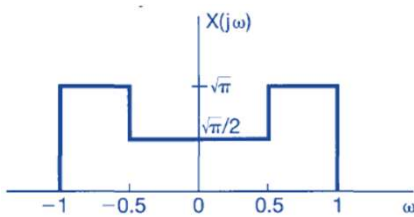
خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

تساوی پارسوال:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

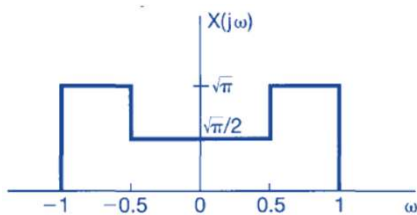
خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال: برای هر یک از تبدیل‌های فوریه نشان داده شده، روابط حوزه زمان زیر را به دست آورید.



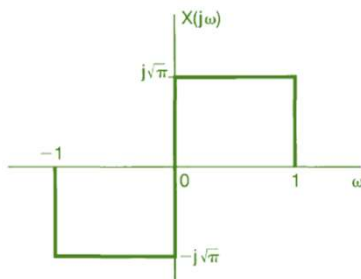
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$D = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$$



$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{5}{8}$$

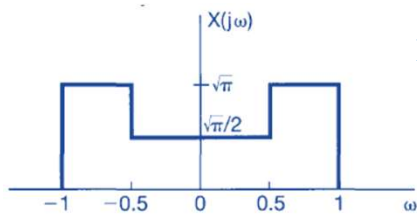


$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 1$$

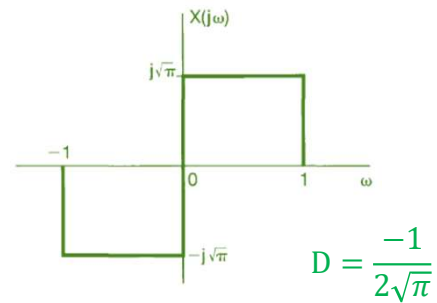
$$D = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$$

$$g(t) = \frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega) = G(j\omega).$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow D = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) d\omega \Rightarrow D = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) d\omega$$



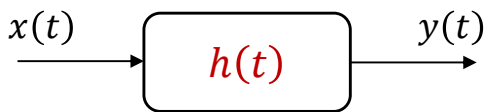
$$D = 0$$



$$D = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}$$

خواص تبدیل فوریۀ زمان پیوسته

خاصیت کانولوشن:



$$x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

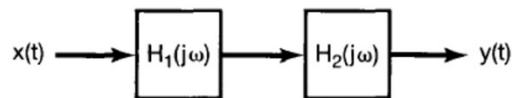
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega).$$

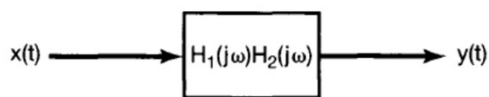
خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

خاصیت کانولوشن:

تذکره:

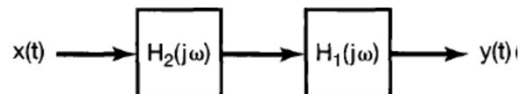


$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$



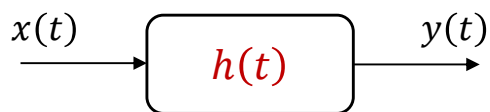
↓
ℱ

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$



خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال:



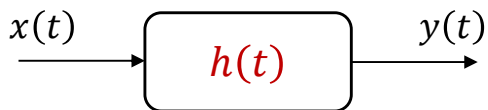
$$h(t) = \delta(t - t_0) \Rightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t - t_0)$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال:

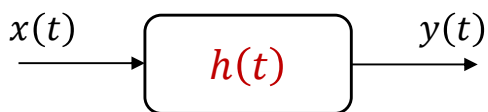


$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow Y(j\omega) = j\omega X(j\omega).$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = j\omega.$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

مثال:

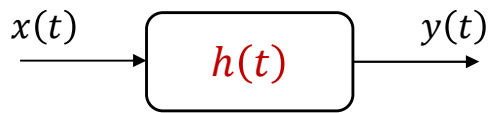


$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).$$

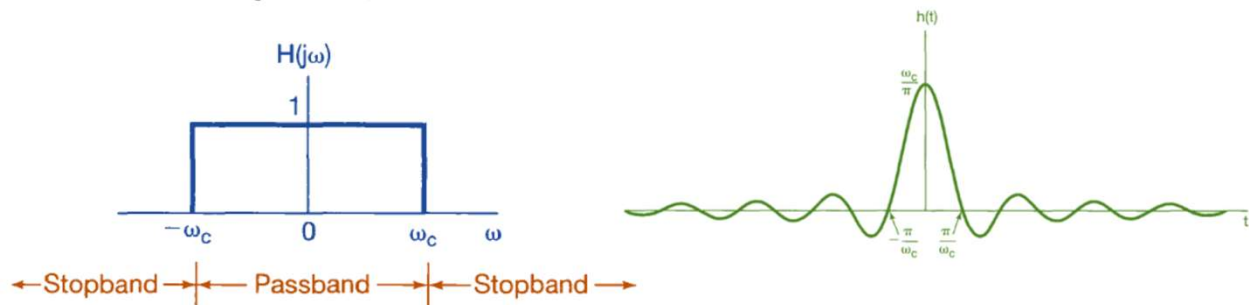
$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(j\omega)\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega), \end{aligned}$$

خواص تبدیل فوريه زمان پيوسته

مثال:



$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \Rightarrow h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t},$$



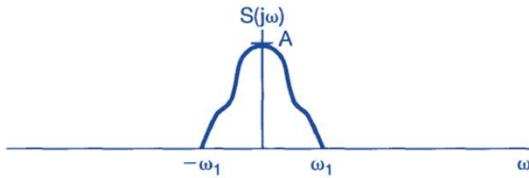
خواص تبدیل فوريه زمان پيوسته

خاصيت ضرب:

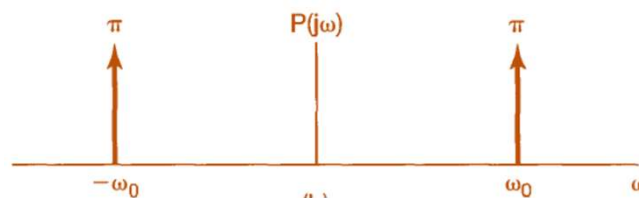
$$r(t) = s(t)p(t) \longleftrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\theta)P(j(\omega - \theta))d\theta$$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

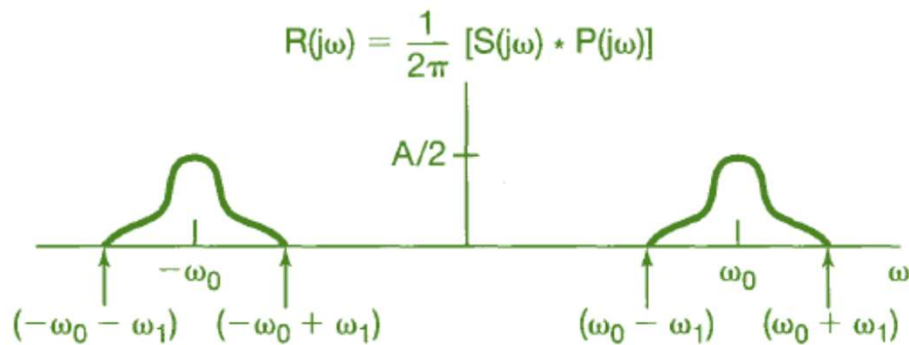
مثال:



$$p(t) = \cos \omega_0 t. \Rightarrow P(j\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0),$$



$$\begin{aligned} r(t) = s(t)p(t) &\Rightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0)), \end{aligned}$$



خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

Section	Property	Aperiodic signal	Fourier transform
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Time Shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
4.3.6	Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Time Reversal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Time and Frequency Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	Multiplication	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)Y(j(\omega - \theta))d\theta$
4.3.4	Differentiation in Time	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integration	$\int_{-\infty}^t x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Differentiation in Frequency	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

4.3.3	Conjugate Symmetry for Real Signals	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Symmetry for Real and Even Signals	$x(t)$ real and even	$X(j\omega)$ real and even
4.3.3	Symmetry for Real and Odd Signals	$x(t)$ real and odd	$X(j\omega)$ purely imaginary and odd
4.3.3	Even-Odd Decomposition for Real Signals	$x_e(t) = \mathcal{E}\{x(t)\}$ [x(t) real] $x_o(t) = \mathcal{O}\{x(t)\}$ [x(t) real]	$\Re\{X(j\omega)\}$ $j\Im\{X(j\omega)\}$

4.3.7 Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

TABLE 4.2 BASIC FOURIER TRANSFORM PAIRS

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, otherwise
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, otherwise
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, otherwise
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1$, $a_k = 0$, $k \neq 0$ (this is the Fourier series representation for any choice of $T > 0$)
Periodic square wave		
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ and $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ for all k
$x(t) \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت
آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

<http://shafieian-education.ir>