

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

فصل پنجم

تبدیل فوریه زمان گسسته

محمدعلی شفیعیان

<http://shafieian-education.ir/>

تبدیل فوریه

سری فوریه ابزاری قدرتمند برای تجزیه و تحلیل سیگنال‌های متناوب است ولی در مورد سیگنال‌های نامتناوب کاربردی ندارد و لذا بحث تبدیل فوریه پیش می‌آید.

ایده اصلی برای تعریف تبدیل فوریه گسسته به منظور تحلیل فرکانسی سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان گسسته از آنجا گرفته شده است که یک سیگنال نامتناوب را می‌توان به صورت سیگنال متناوب با دوره تناوب بینهايت در نظر گرفت و از تعاریف و مفاهیم سری فوریه گسسته کمک گرفت تا به تبدیل فوریه گسسته دست یابیم.

تبدیل فوریه زمان گسسته

روابط تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{روشی برای بیان سیگنال } x[n] \text{ از} \\ \text{حوزه زمان به حوزه فرکانس} \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow \\ \text{روشی برای بیان سیگنال} \\ \text{از حوزه فرکانس به حوزه زمان} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \Rightarrow \\ x[n] \xleftarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \text{ و } x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \\ \text{نکته:} \text{ تبدیل فوریه زمان گسسته را طیف سیگنال زمان گسسته می نامند و همانند سیگنال زمان پیوسته \\ \text{یک تابع پیوسته از فرکانس } (\omega) \text{ است.} \end{array} \right.$$

تبدیل فوریه زمان گسسته

موارد تفاوت با تبدیل فوریه زمان پیوسته

✓ تبدیل فوریه زمان گسسته متناوب با دوره تناوب 2π است.

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

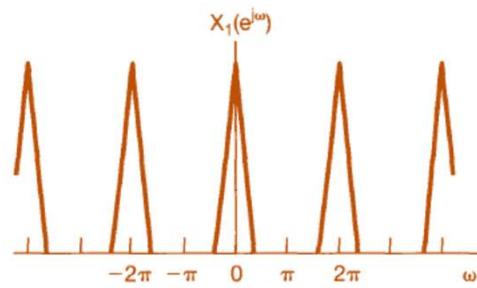
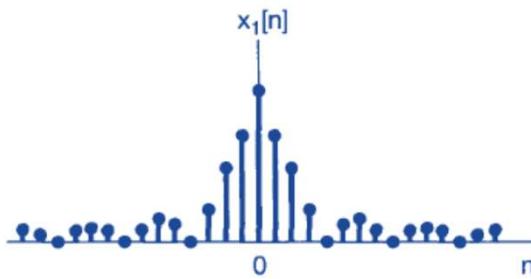
✓ بازه انتگرال‌گیری در تبدیل فوریه زمان گسسته معکوس، محدود است. (روی بازه‌ای به طول 2π انتگرال‌گیری انجام می‌شود).

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

تبديل فوريه زمان گستته

موارد تفاوت با تبديل فوريه زمان پيوسته

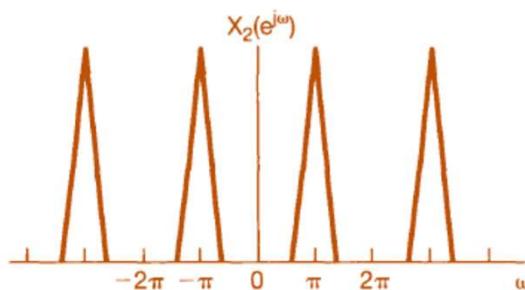
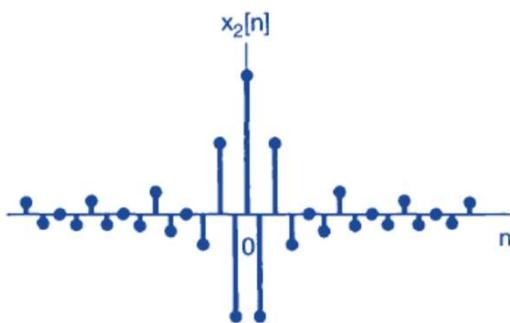
- ✓ طيف سينال زمان گستته با تغييرات آهسته (سينال هاي فرکانس پاين يا همان پاين گذر) نزديك $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ غير صفر است. به عبارت ديگر برای سينال هاي فرکانس پاين اندازه طيف نزديك $2k + 1\pi$ بيشتر از اندازه طيف در اطراف π است.



تبديل فوريه زمان گستته

موارد تفاوت با تبديل فوريه زمان پيوسته

- ✓ طيف سينال زمان گستته با تغييرات سريع نزديك $(2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ غير صفر است. به عبارت ديگر برای سينال هاي فرکانس بالا (بالا گذر) اندازه طيف نزديك $(2k + 1)\pi$ بزرگتر از اندازه طيف در اطراف $2k\pi$ است.



همگرایی تبدیل فوریه زمان گستته

شرایط کافی برای همگرایی (مشابه حالت پیوسته)

شرط جمع‌پذیری مطلق سیگنال $x[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

شرط محدودیت انرژی سیگنال $x[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

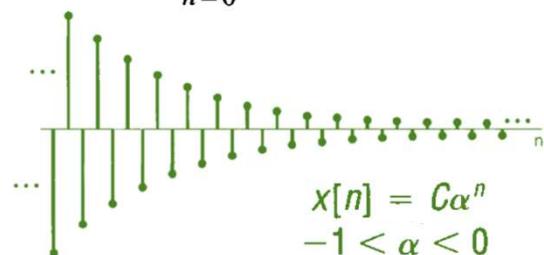
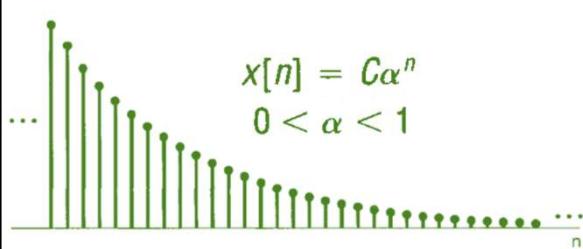
** باید توجه داشت که تبدیل فوریه زمان گستته معکوس، مشکل همگرایی ندارد.

تبدیل فوریه زمان گستته

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

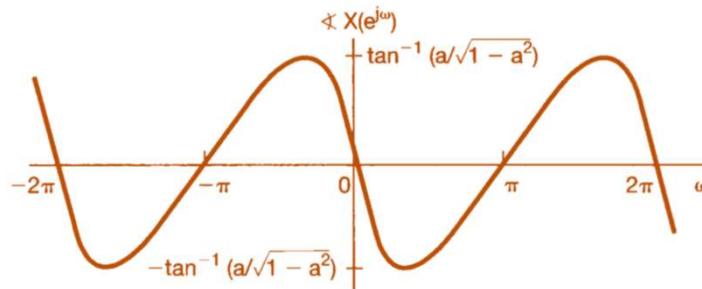
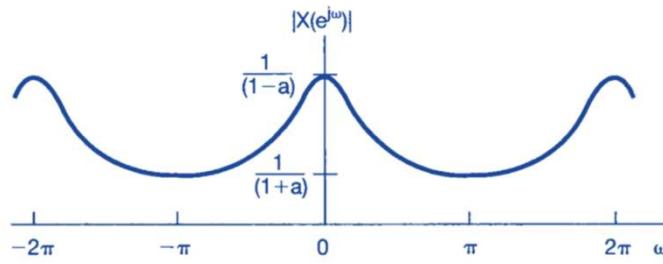
$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

$$\begin{aligned} \text{تبدیل فوریه} \quad X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \\ \text{زمان گستته} \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$



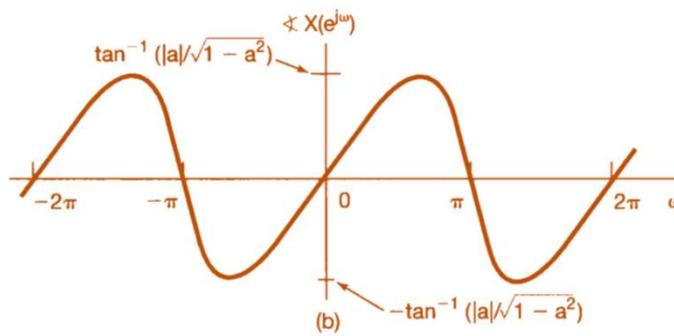
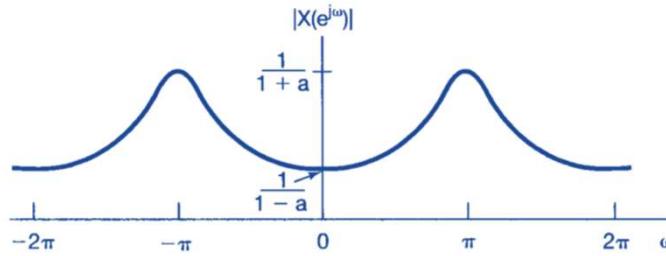
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$a > 0$



$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$a < 0$



تبدیل فوریه زمان گسسته

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

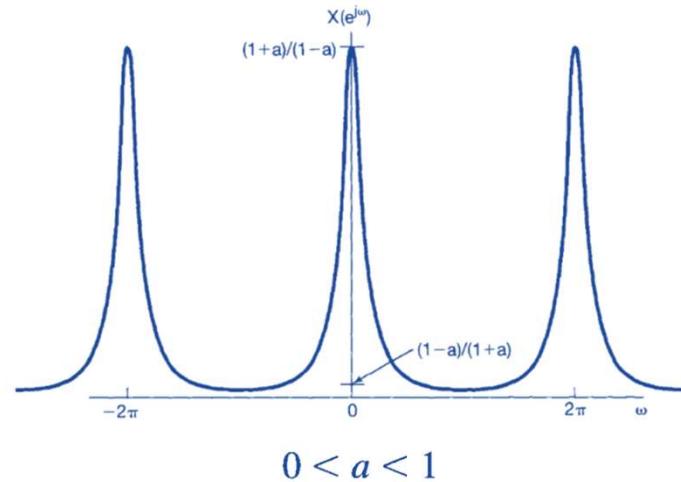
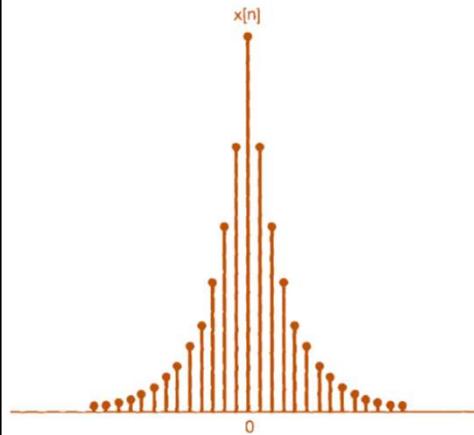
$$x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$$

تبدیل فوریه
زمان گسسته

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} \\ &\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^m. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$



تبدیل فوریه زمان گسسته

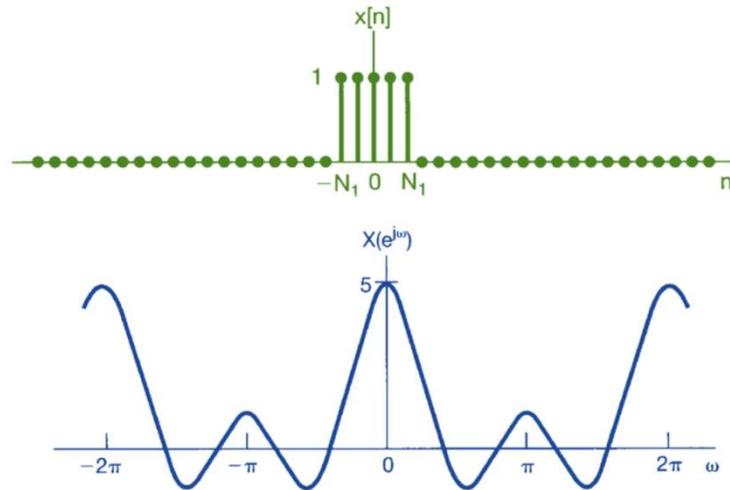
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{\sin \omega (N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\omega/2)}$$



تبدیل فوریه زمان گسسته

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

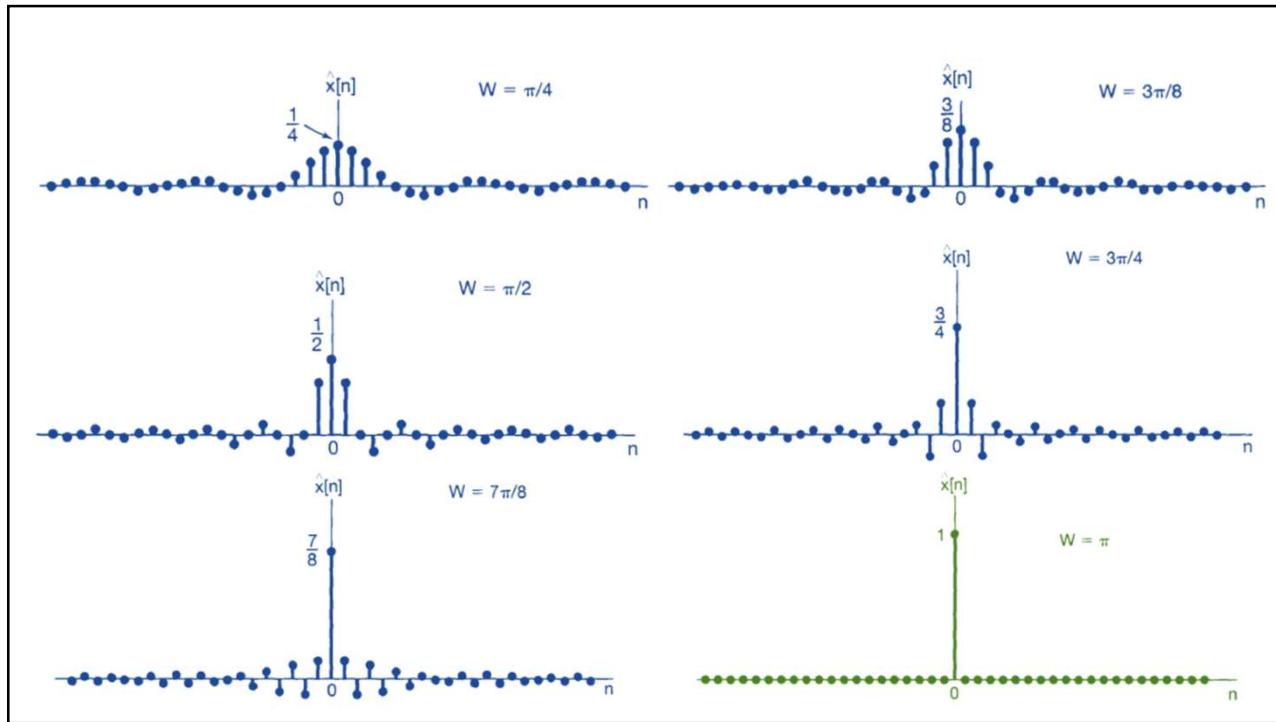
$$x[n] = \delta[n]$$

تبدیل فوریه زمان گسسته

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = 1$$

تبدیل فوریه زمان گسسته معکوس

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \Rightarrow \hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



تبديل فوريه زمان گستته

مثال: تبدل فوريه معکوس $X(e^{j\omega}) = \delta(\omega)$ ، $-\pi < \omega \leq \pi$ را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \text{تبديل فوريه}& \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ \text{معکوس}& \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{2\pi} \delta(\omega) e^{j(0)n} d\omega}_{1} = \frac{1}{2\pi}$$

تبدیل فوریه زمان گستته برای سیگنال‌های متناوب

دقت کنید که سیگنال‌های متناوب شرط کافی برای همگرایی را ندارند ولی تبدیل فوریه دارند
ابتدا فرض می‌کنیم که تبدیل فوریه سیگنال $[n] x$ برابر است با:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)e^{j\omega n} \\ \Rightarrow x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)}_{\text{در یک پریود } 2\pi \text{ فقط یک ضربه وجود دارد}} e^{j(\omega_0 + 2\pi l)n} d\omega \\ &= e^{j(\omega_0 + 2\pi l)n} \int_{2\pi} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) d\omega = e^{j\omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi ln}}_1 = e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

تبدیل فوریه زمان گستته برای سیگنال‌های متناوب

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})t} \longleftrightarrow a_k$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})t} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$$

تبدیل فوریه گستته برای سیگنال‌های متناوب

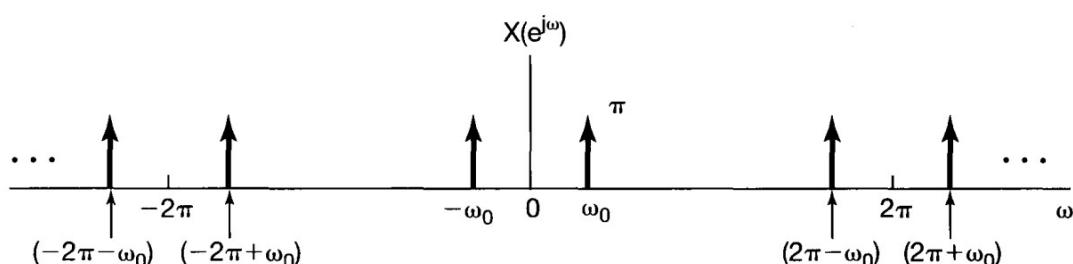
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x[n] = \cos \omega_0 n$$

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l \right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l \right)$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{5} \right) + \pi \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{5} \right), \quad -\pi \leq \omega < \pi,$$

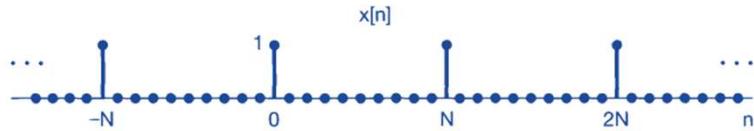


Discrete-time Fourier transform of $x[n] = \cos \omega_0 n$.

تبدیل فوریه گستته برای سیگنال‌های متناوب

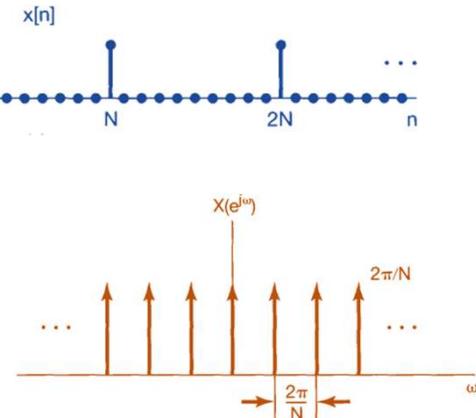
مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN],$$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}. \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}.$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right).$$



خواص تبدیل فوریه زمان گستته

خاصیت تناوب:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}). \quad \xrightarrow{} X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}).$$

خاصیت خطی بودن:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) \\ x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}), \quad \xrightarrow{} ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}).$$

خاصیت شیفت زمانی و فرکانسی:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \quad \xrightarrow{} x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}).$$

خواص تبدیل فوریه زمان گستته

خاصیت مزدوج و تقارن مزدوج:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \quad \rightarrow \quad x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega}).$$

if $x[n]$ is real $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ is conjugate symmetric. $\Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ [$x[n]$ real].

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}v\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Re e\{X(e^{j\omega})\} \\ \text{real part of the Fourier transform is an even function of frequency.} \\ \mathcal{O}d\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Im m\{X(e^{j\omega})\}, \\ \text{imaginary part is an odd function of frequency.} \end{cases}$$

خواص تبدیل فوریه زمان گستته

خاصیت تفاضل گیری و جمع انبارهای:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \quad \Rightarrow x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}).$$

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \quad \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

خواص تبدیل فوریه زمان گستته

مثال: با استفاده از خواص، تبدیل فوریه سیگنال زیر را به دست آورید:

$$x[n] = u[n]$$

$$g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega}) = 1.$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{m=-\infty}^n g[m]. \quad \rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k). \end{aligned}$$

خواص تبدیل فوریه زمان گستته

قرینگی زمانی:

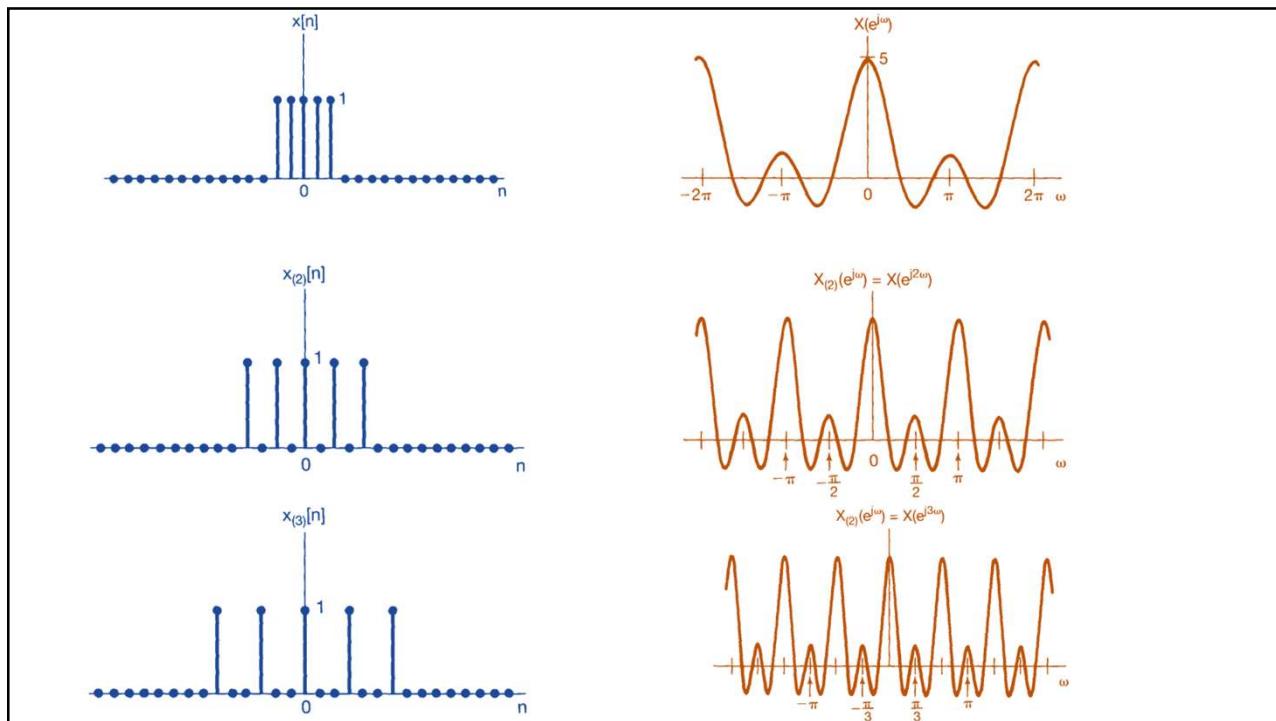
$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}). \quad \rightarrow x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}).$$

خواص تبدیل فوریه زمان گستته

مقیاس دهی زمانی و فرکانسی:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jk\omega}).$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k. \end{cases}$$



خواص تبدیل فوریه زمان گستته

مشتقگیری فرکانسی:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}). \Leftrightarrow nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.$$

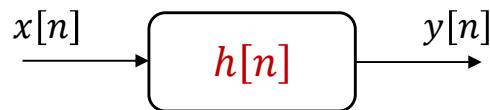
خواص تبدیل فوریه زمان گستته

تساوی پارسوال:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega), \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

خاصیت کانولوشن:



$$x[n] = e^{j\omega n} \longrightarrow y(t) = H(e^{-j\omega})e^{j\omega n} \quad H(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$y[n] = x[n] * h[n], \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),$$

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

خاصیت ضرب:

$$x[n]y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

خواص تبدیل فوریه زمان گستته

Section	Property	Aperiodic Signal	Fourier Transform
5.3.2	Linearity	$x[n]$ $y[n]$ $ax[n] + by[n]$	$X(e^{j\omega})$ periodic with $Y(e^{j\omega})$ period 2π $aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
5.3.3	Time Shifting	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
5.3.3	Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
5.3.4	Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
5.3.6	Time Reversal	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5.3.7	Time Expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n = \text{multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \neq \text{multiple of } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
5.4	Convolution	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
5.5	Multiplication	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
5.3.5	Differencing in Time	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
5.3.5	Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$ $+ \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

خواص تبدیل فوریه زمان گستته

5.3.8	Differentiation in Frequency	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
5.3.4	Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\} \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
5.3.4	Symmetry for Real, Even Signals	$x[n]$ real and even	$X(e^{j\omega})$ real and even
5.3.4	Symmetry for Real, Odd Signals	$x[n]$ real and odd	$X(e^{j\omega})$ purely imaginary and odd
5.3.4	Even-odd Decomposition of Real Signals	$x_e[n] = \Re\{x[n]\}$ [$x[n]$ real] $x_o[n] = \Im\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$ $j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
5.3.9	Parseval's Relation for Aperiodic Signals	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

Signal	Fourier Transform	Fourier Series Coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-N} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic

$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$ and $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—

$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

خاصیت دوگانی (Duality)

	Continuous time		Discrete time	
	Time domain	Frequency domain	Time domain	Frequency domain
Fourier Series	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ continuous time periodic in time	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ discrete frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ discrete time periodic in time	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=(N)} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ discrete frequency periodic in frequency
Fourier Transform	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ continuous time aperiodic in time	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ continuous frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ discrete time aperiodic in time	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ continuous frequency periodic in frequency

دل گرچه درین بادیه بسیار شتافت

یک موی ندانست و بسی موی شکافت

گرچه ز دلم هزار خورشید بتافت

آخر به کمال ذرهای راه نیافت

ابوسعید ابوالخیر

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت
آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

<http://shafieian-education.ir>