

ریاضیات مهندسی

آنالیز فوریه بخش اول – توابع متناوب

محمدعلی شفیعیان

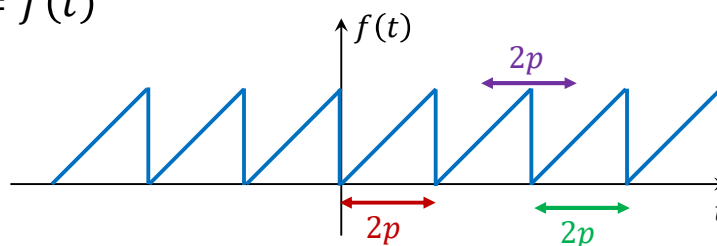
<http://shafieian-education.ir/>

توابع متناوب

تابعی را پریودیک (متناوب) گویند اگر یک فاصله زمانی موسوم به پریود (دوره تناوب) را تکرار کند.

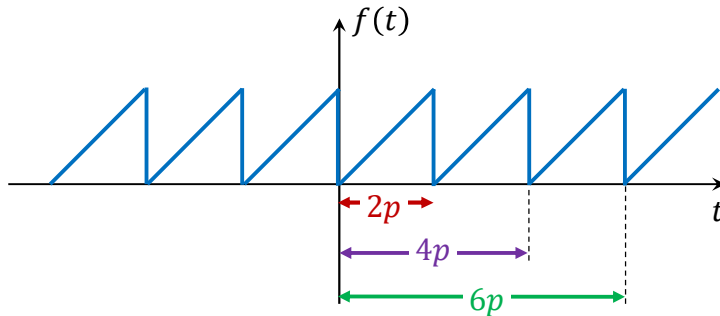
به عبارت بهتر اگر تابع $f(t)$ دارای دوره تناوب $T = 2p$ باشد، داریم:

$$\forall t : f(t + 2p) = f(t)$$



توابع متناوب

تذکر: اگر تابعی دارای دوره تناوب $T = 2p$ باشد، هر **مضرب صحیح مثبتی** از آن مثل $2mp$ نیز باز هم دوره تناوب است.



پس هر تابع متناوب دارای بینهایت دوره تناوب است که ما کوچکترین آنها را **پریود اصلی** یا **پریود پایه** (یا به زبان ساده **دوره تناوب**) می‌نامیم.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \sin \omega t$$

$$\sin \omega(t + 2p) = \sin \omega t \quad \rightarrow \quad \sin(\omega t + 2p\omega) = \sin \omega t$$

~~Sin~~ $(\omega t + 2p)$ ←

$$\rightarrow 2p\omega = 2k\pi \quad \rightarrow \quad 2p = \frac{2k\pi}{\omega} \quad \xrightarrow{k=1} \quad T = 2p = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f(t) = \cos \omega t \quad \xrightarrow{\text{به طور مشابه}} \quad T = 2p = \frac{2\pi}{\omega}$$

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \tan \omega t$$

$$\tan \omega(t + 2p) = \tan \omega t \rightarrow \tan(\omega t + 2p\omega) = \tan \omega t$$

$$\rightarrow 2p\omega = k\pi \rightarrow 2p = \frac{k\pi}{\omega} \xrightarrow{k=1} T = 2p = \frac{\pi}{\omega}$$

$$f(t) = \cot \omega t \xrightarrow{\text{به طور مشابه}} T = 2p = \frac{\pi}{\omega}$$

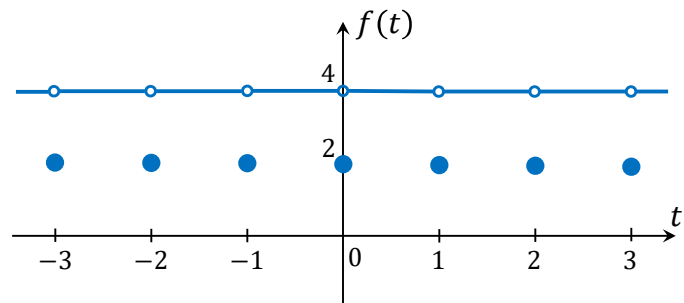
مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = 4$$

برای این تابع، هر عددی می‌تواند دوره تناوب باشد ولی نمی‌توان برای آن دوره تناوب اصلی تعریف کرد.

$$f(t) = \begin{cases} 4 & t \text{ های غیر صحیح} \\ 2 & t \text{ های صحیح} \end{cases}$$

$$2p = 1$$



مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = 1 + \underbrace{\cos t}_{T=2\pi} + \underbrace{\cos 2t}_{T=\pi}$$

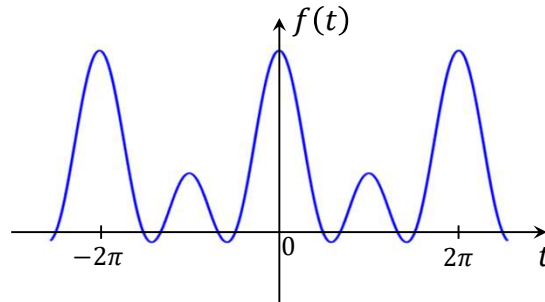
هر عددی می تواند دوره تناوب باشد.

$$T = 2\pi$$

$$T = \pi$$



$$2p = \text{م.م.ک}(\pi, 2\pi) = 2\pi$$



مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \sin 9\pi t \times \cos \pi t = \frac{1}{2} [\underbrace{\sin(10\pi t)}_{T=1/5} + \underbrace{\sin(8\pi t)}_{T=1/4}]$$

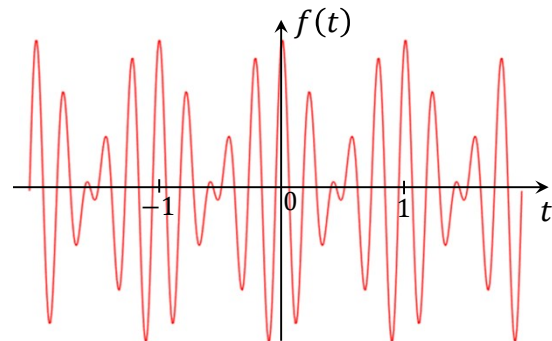
$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$T = \frac{1}{5}$$

$$T = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2p = \text{م.م.ک}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) = 1$$

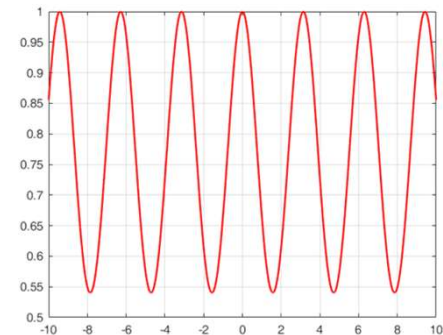
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
	$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{4}$
	$\frac{4}{5}$		$\frac{4}{4}$
	$\frac{5}{5}$		$\frac{5}{4}$
	$\frac{6}{5}$		$\frac{6}{4}$



مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بیابید.

$$f(t) = \cos(\sin t)$$

$$2p = \pi \quad \rightarrow \quad \cos(\sin(t + \pi)) = \cos(-\sin(t)) = \cos(\sin(t))$$



$$f(t) = e^{\sin t}$$

$$f(t) = \ln(\sin t)$$

مثال: اگر تابع $f(t)$ دارای دوره تناوب $2b$ باشد، عدد مثبت k را به گونه‌ای بیابید که تابع $f(kt)$ دارای دوره تناوب $2p$ گردد.

$$f[k(t + 2p)] = f(kt) \quad \rightarrow \quad f[\underbrace{kt}_x + \underbrace{2kp}_{2b}] = f(\underbrace{kt}_x)$$

$$\rightarrow 2kp = 2b \quad \rightarrow \quad k = \frac{b}{p}$$

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت
آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

<http://shafieian-education.ir>