ریاضیات مهندسی

آنالیز فوریه
بخش سوم ـ سری فوریه

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

شرایط دیریکله (دیریشله ـ Dirichlet)

قضیه فوریه

فرض کنید تابع $f(t)$ دارای شرایط زیر موسوم به شرایط دیریشله باشد:

۱. تابع $f(t)$ متناوب با دوره تناوب $2p$ باشد.
۲. تابع $f(t)$ در هر دوره تناوب ، تعریف‌شده باشد.
۳. تعداد نقاط اکستریمم تابع $f(t)$ در هر دوره تناوب محدود باشد.
۴. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(t)$ در هر دوره تناوب محدود باشد.

آنگاه می‌توان آن را به فرم سری مثلثاتی زیر موسوم به سری فوریه نوشت:

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

سری فوریه (Fourier Series)

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 \\ a_n \\ b_n \end{array}\right.$$

ضرایب فوریه
یا
ضرایب اولر

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

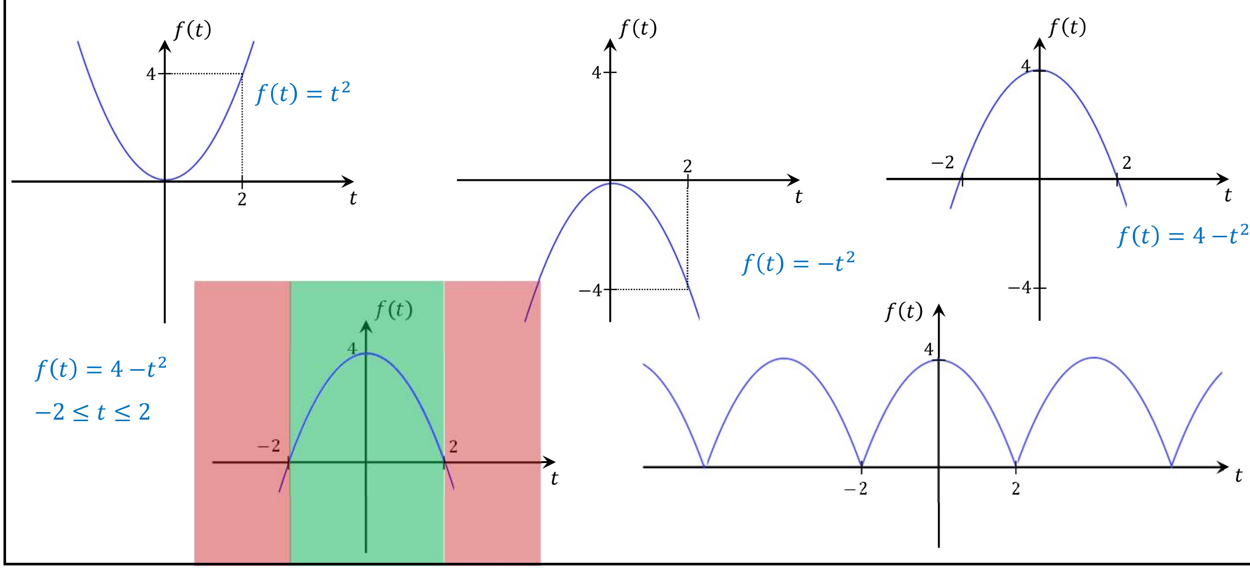
در این روابط منظور از $\int_d^{d+2p}$ انتگرال‌گیری روی یک دوره تناوب است.

$$b_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

مثال: فرض کنید تابع متناوب زیر در یک دوره تناوبش تعریف شده باشد. سری فوریه آن را بیابید.

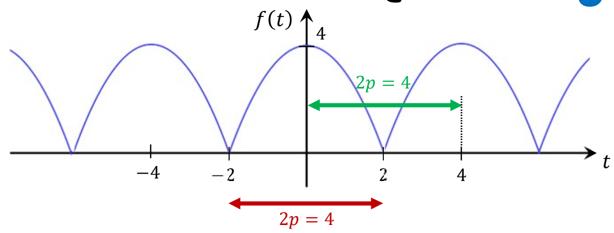
$$f(t) = 4 - t^2 \qquad -2 \le t \le 2$$



مثال: فرض کنید تابع متناوب زیر در یک دوره تناوبش تعریف شده باشد. سری فوریه آن را بیابید.

$$f(t) = 4 - t^2 \qquad -2 \le t \le 2$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$



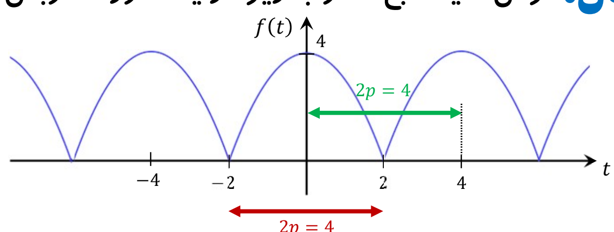
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left[4t - \frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-t^2)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt}\, = \frac{-16\cos n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-t^2)\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt = 0$$

مثال: فرض کنید تابع متناوب زیر در یک دوره تناوبش تعریف شده باشد. سری فوریه آن را بیابید.

$$f(t) = 4 - t^2 \qquad -2 \le t \le 2$$

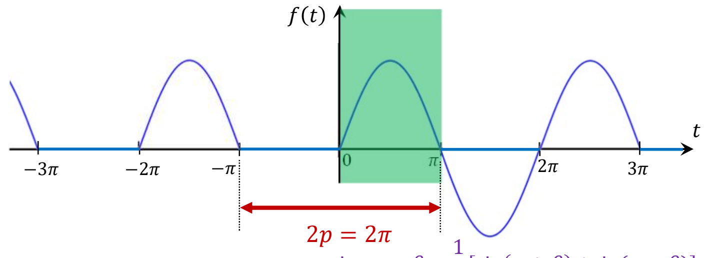


$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{16}{3} \\ a_n &= \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \\ b_n &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(t) = \frac{8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

مثال: سری فوریه تابع متناوب زیر را که در یک دوره تناوبش تعریف شده است را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \le t \le 0 \\ \sin t & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$



$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{-1}{\pi}\Big[\cos t\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos nt\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+n)\,t + \sin(1-n)t]\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+n)\,t + \sin(1-n)t]\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)t}{1+n}\Big)_0^{\pi} - \frac{\cos(1-n)t}{1-n}\Big)_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+1}(\underbrace{\cos(n+1)\pi}_{-\cos n\pi} - 1) - \frac{1}{1-n}(\underbrace{\cos(1-n)\pi}_{-\cos n\pi} - 1)\right]$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(n\pi+\pi) = \cos n\pi \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \underbrace{\sin n\pi \sin\pi}_{0}$$

$$= \frac{1+\cos n\pi}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n}\right] = \frac{1+\cos n\pi}{2\pi}\left[\frac{2}{1-n^2}\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1+\cos n\pi}{\pi(1-n^2)} \qquad n \ne 1$$

$$n = 1 \quad \to \quad a_1 = \frac{0}{0} \qquad \Rightarrow a_1 = \lim_{n\to 1}\frac{1+\cos n\pi}{\pi(1-n^2)} = \lim_{n\to 1}\frac{-\pi\sin n\pi}{-2n\pi} = 0$$

نکته ۱

اگر روش استفاده از حد به جواب مطلوب نرسید، به سراغ رابطه a_n می‌رویم و رابطه را از همان ابتدا به‌ازای $n=1$ حل می‌کنیم تا a_1 به‌دست آید:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos nt \, dt \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos t \, dt = 0$$

نکته ۲

در این مثال، مشاهده می‌شود که $a_n = \left.\frac{1+\cos}{\pi(1-n^2)}\right|_{n=0} = \frac{2}{\pi}$ **که این همان a_0 است. پس اگر در رابطه a_n به‌ازای $n=0$ به عدد محدود و معینی رسیدیم، این عدد همان a_0 است ولی در غیر این‌صورت باید a_0 را از رابطه خودش حساب کرد.**

$$b_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t \sin nt\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1-n)\,t - \cos(1+n)t]\,dt$$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{sin(1-n)t}{1-n}\right)_0^{\pi} - \left.\frac{\sin(1+n)t}{1+n}\right)_0^{\pi}\right] = 0 \qquad n \neq 1$$

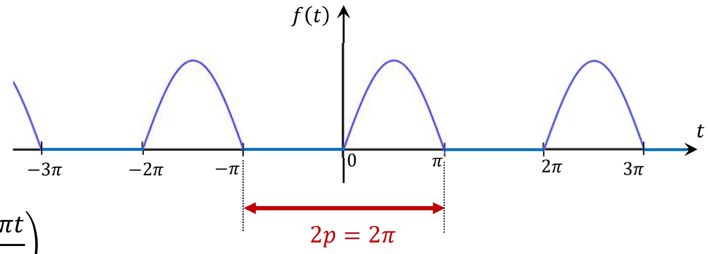
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}$$

$\int sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

$\cos 2\theta = 1 - 2sin^2\theta$

مثال: سری فوریه تابع متناوب زیر را که در یک دوره تناوبش تعریف شده است را بیابید.

$$f(t)=\begin{cases}0 & -\pi\le t\le 0\\ \sin t & 0\le t\le \pi\end{cases}$$



$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1+\cos n\pi}{\pi(1-n^2)}\qquad n\neq 1$$

$$b_n=0\qquad n\neq 1$$

$$b_1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad f(t)=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{\pi(1-n^2)}\cos(nt)+\frac{1}{2}\sin t$$

شرایط دیریکله (دیریشله ـ Dirichlet)

قضیه دیریشله (دیریکله)

اگر سری فوریه تابع $f(t)$ را $g(t)$ بنامیم، آنگاه داریم:

الف) اگر t_1 جزء نقاط پیوستگی تابع $f(t)$ باشد، آنگاه: $f(t_1)=g(t_1)$

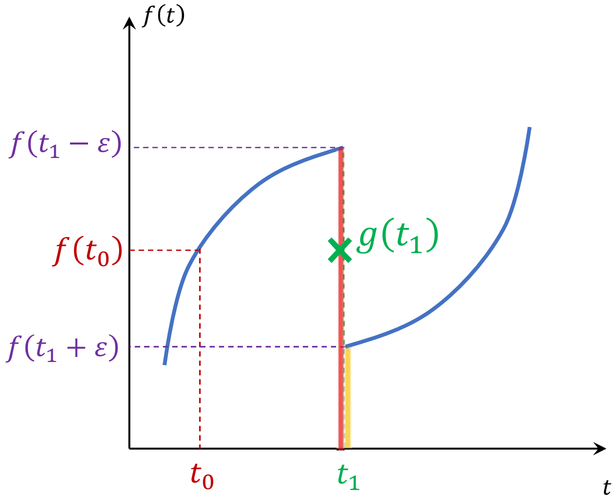
ب) اگر t_1 جزء نقاط ناپیوستگی تابع $f(t)$ باشد، آنگاه حاصل $g(t_1)$ به سمت نقطه میانی ناپیوستگی میل می‌کند یعنی:

$$g(t_1)=\frac{f(t_1+\varepsilon)+f(t_1-\varepsilon)}{2}\qquad \varepsilon\to 0$$

$f(t_1+\varepsilon)$: مقدار تابع $f(t)$ بلافاصله پس از ناپیوستگی t_1

$f(t_1-\varepsilon)$: مقدار تابع $f(t)$ بلافاصله قبل از ناپیوستگی t_1

قضیه دیریکله



$f(t_0) = g(t_0)$

$$g(t_1) = \frac{f(t_1+\varepsilon)+f(t_1-\varepsilon)}{2} \qquad \varepsilon \to 0$$

مثال: اگر $g(t)$ سری فوریه تابع زیر باشد، بدون محاسبه سری فوریه، حاصل $g(0)$، $g(1)$، $g(-5)$، و $g(10)$ را بیابید.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -2 \le t \le -1 \\ 0 & -1 \le t \le 0 \\ -1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

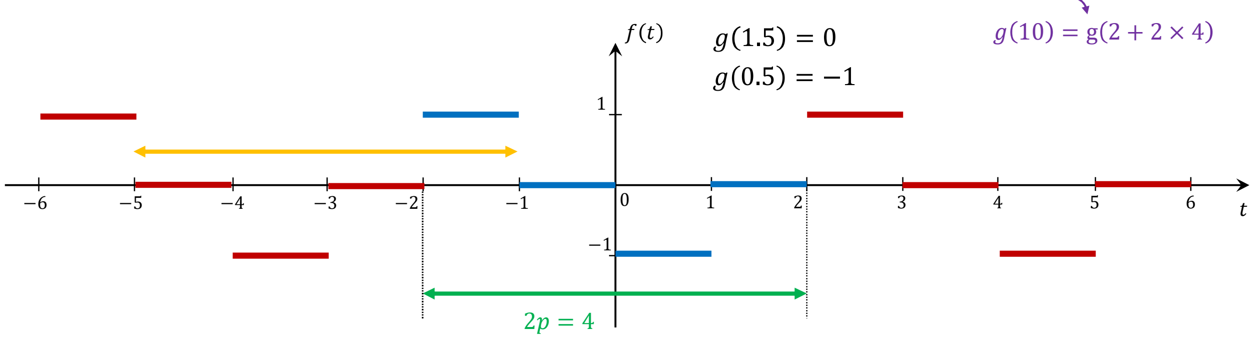
$g(0) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $g(-5) = g(-1) = \frac{1}{2}$

$g(1) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $g(10) = g(2) = \frac{1}{2}$

$g(10) = g(2+2\times 4)$

$g(1.5) = 0$

$g(0.5) = -1$



مثال: قبلاً دیدیم که سری فوریه تابع $-2 \le t \le 2$ $f(t) = 4 - t^2$ به فرم زیر به‌دست آمد:

$$g(t) = \frac{8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

با استفاده از سری بالا و قضیه دیریشله، حاصل سری زیر را بیابید:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$f(t) = 4 - t^2 = \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi t}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{2} - \cdots\right)$$

باید t مناسبی پیدا کنیم که سری فوریه را به سری مطلوب مسأله تبدیل کند.

در این مسأله $t = 0$ مناسب است و چون جزو نقاط پیوستگی تابع $f(t)$ است داریم:

$$g(0) = f(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\right) = 4$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\right) = \frac{\pi^2}{16}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$

بسط‌های نیم‌دامنه

قضیه ۱: فرض کنید تابع $f(t)$ تابعی زوج باشد که شرایط دیریشله را تأمین کند، آنگاه داریم:

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,dt \qquad b_n = 0$$

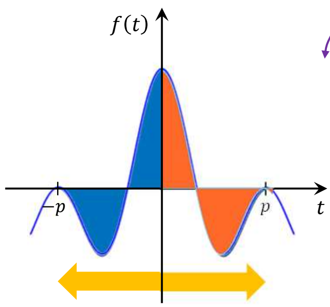
$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

قضیه ۲: فرض کنید تابع $f(t)$ تابعی فرد باشد که شرایط دیریشله را تأمین کند، آنگاه داریم:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \qquad a_0 = a_n = 0$$

فرض کنید تابع $f(t)$ تابعی زوج باشد $\Leftarrow \quad f(-t)=f(t)$

$$a_0=\frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\,dt=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt=\frac{2}{p}\int_0^{p} f(t)\,dt$$

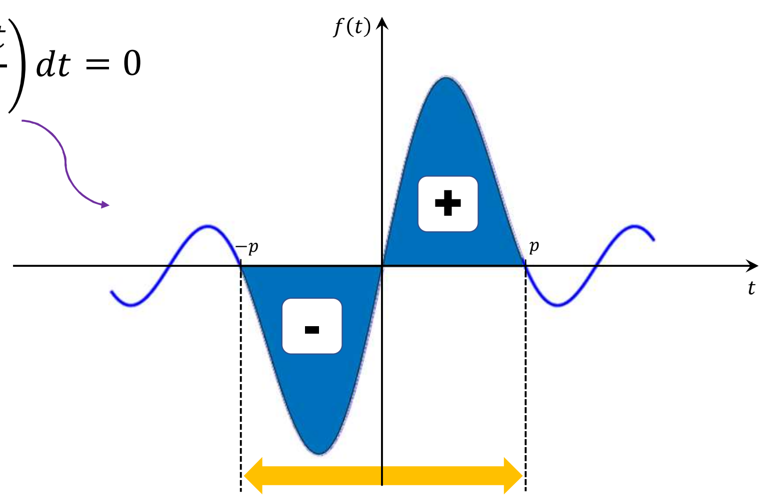


$$a_n=\frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

$$=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}}dt=\frac{2}{p}\int_0^{p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

فرض کنید تابع $f(t)$ تابعی زوج باشد $\Leftarrow \quad f(-t)=f(t)$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_d^{d+2p} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)}_{\text{فرد}}}_{\text{فرد}}dt=0$$



مثال: سری فوریه تابع $f(t) = t$ را که در فاصله $[-1,1]$ بیابید.

تابع $f(t) = t$ تابعی فرد است پس $a_0 = a_n = 0$ است.

$$b_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^{p} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \frac{2}{1}\int_0^{1} t\sin\left(\frac{n\pi t}{1}\right)dt = 2\int_0^{1} t\sin(n\pi t)\,dt$$

$+$	t	$\sin(n\pi t)$
$-$	1	$-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)$
	0	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi t)$

$$= 2\left[-\frac{t}{n\pi}\cos(n\pi t) + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= 2\left[-\frac{t}{n\pi}\cos(n\pi t) + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi t)\right]_0^1$$

$$= 2\left[\left(-\frac{1}{n\pi}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + \frac{1}{n^2\pi^2}\underbrace{\cancel{\sin(n\pi)}}_{0}\right) - \left(0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\underbrace{\cancel{\sin(0)}}_{0}\right)\right] = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n$$

$$\Rightarrow\quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi t}{1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}(-1)^n \sin(n\pi t)$$

تمرین ۱: سری فوریه تابع $f(t) = |t|$ را که در فاصله $[-\pi,\pi]$ بیابید.

تمرین ۲: سری فوریه تابع $f(t) = |\sin t|$ را که در فاصله $[-\pi,\pi]$ بیابید.

تمرین ۳: سری فوریه تابع $f(t) = e^t + 3$ را که در فاصله $[-\pi,\pi]$ بیابید.

قضیه: (انتگرال‌گیری از سری فوریه)

اگرتابع $f(t)$ و $\int f(t)dt$ شرایط دیریشله را برآورده کنند، آنگاه با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوریه $f(t)$ می‌توان به سری فوریه $\int f(t)dt$ رسید.

(در انتگرال‌گیری، یک ثابت نیز به‌دست می‌آید که باید آن را نیز حساب کرد)

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

$$\int f(t)dt = \int \frac{1}{2}a_0\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right) dt + C$$

قضیه: (مشتق‌گیری از سری فوریه)

اگرتابع $f(t)$ و $f'(t)$ شرایط دیریشله را برآورده کنند، آنگاه با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوریه $f(t)$ می‌توان به سری فوریه $f'(t)$ رسید.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

$$f'(t) = \quad 0 \; + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{p}{n\pi} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \frac{p}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

مثال: اگرسری فوریه تابع $-1 < t < 1 \quad f(t) = t$ به‌صورت زیر باشد:

$$f(t) = t = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi t)$$

آنگاه بسط فوریه تابع $-1 < t < 1 \quad f_2(t) = t^2$ را بیابید.

$$\int f(t)dt = \int t\, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\underbrace{\int t\,dt}_{\downarrow} = \underbrace{\int \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi t)\,dt}_{\downarrow}$$

$$\frac{1}{2}t^2 + C_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\underbrace{\int \sin(n\pi t)dt}_{-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)+C_2} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}t^2 = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos(n\pi t) + C}$$

$$t = 0 \quad \rightarrow 0 = \frac{2}{\pi^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}}_{-\frac{\pi^2}{12}} + C \rightarrow C = \frac{1}{6} \Longrightarrow t^2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos(n\pi t) + \frac{1}{3}$$

(قبلاً محاسبه شده است)

$$t^2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos(n\pi t) + \frac{1}{3}$$

$$t^2 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right) \Rightarrow t^2 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

تابع $f(t) = t^2$ تابعی زوج است

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \\ \dfrac{1}{2}a_0 = \dfrac{1}{3} \quad \longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{2}{3} \\ b_n = 0 \end{cases}$$

قضیه پارسوال:

اگر تابع $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2p$ باشد، داریم:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}[f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

مثال: اگرسری فوریه تابع $-\pi < t < \pi \quad f(t) = t^2$ به‌صورت زیر باشد:

$$f(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

آنگاه حاصل سری زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$t^2 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \qquad b_n = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}[f(t)]^2dt}_{*} = \underbrace{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}_{**}$$

$$* \rightarrow \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}[f(t)]^2dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[t^2]^2dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t^4dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^5}{5}\right] = \frac{2}{5}\pi^4$$

$$** \rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\right)^2 + 0^2\right) = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4}\overbrace{(-1)^{2n}}^{1}\right)$$

$$= \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\frac{2}{5}\pi^4 = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) \rightarrow \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\rightarrow \frac{18\pi^4 - 10\pi^4}{45} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) \rightarrow \frac{8\pi^4}{45} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{8\pi^4}{45}}{16} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{8\pi^4}{90}$$

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\underbrace{(4-t^2)}_{u}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt}_{dv} = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{2(4-t^2)}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\right]_{-2}^{2}}_{\text{صفر}} + \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{2} t\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$$

$$\begin{cases} u = (4-t^2) \\ dv = \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2tdt \\ v = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \end{cases}$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{2}\underbrace{t}_{u}\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = t \\ dv = \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \end{cases}$$

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2t}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_{-2}^{2} + \overbrace{\frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt}^{\text{صفر}}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n\pi}\cos n\pi\right] = \frac{-16\cos n\pi}{n^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-t^2)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[(4-t^2)\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)-\frac{8t}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)+\frac{16}{n^3\pi^3}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right]_{-2}^{2}=\frac{-16\cos n\pi}{n^2\pi^2}$$

	مشتق	انتگرال
$+$	$(4-t^2)$	$\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$
$-$	$-2t$	$\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$
$+$	-2	$\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$
	0	$\frac{-8}{n^3\pi^3}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$

$\cos(n\pi)=(-1)^n \quad n\in\mathbb{Z}$

$n=0 \rightarrow \cos(0\pi)=+1$

$n=1 \rightarrow \cos(1\pi)=-1$

$n=2 \rightarrow \cos(2\pi)=+1$

$n=3 \rightarrow \cos(3\pi)=-1$

$\sin(n\pi)=0 \quad n\in\mathbb{Z}$

$n=0 \rightarrow \sin(0\pi)=0$

$n=1 \rightarrow \sin(1\pi)=0$

$n=2 \rightarrow \sin(2\pi)=0$

$n=3 \rightarrow \sin(3\pi)=0$

$\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad n\in\mathbb{Z}$

$n=0 \rightarrow \cos\left(1\frac{\pi}{2}\right)=0$

$n=1 \rightarrow \cos\left(3\frac{\pi}{2}\right)=0$

$n=2 \rightarrow \cos\left(5\frac{\pi}{2}\right)=0$

$n=3 \rightarrow \cos\left(7\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n \quad n\in\mathbb{Z}$

$n=0 \rightarrow \sin\left(1\frac{\pi}{2}\right)=+1$

$n=1 \rightarrow \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$n=2 \rightarrow \sin\left(5\frac{\pi}{2}\right)=+1$

$n=3 \rightarrow \sin\left(7\frac{\pi}{2}\right)=-1$