ریاضیات مهندسی

آنالیز فوریه
بخش چهارم – روش‌های نمایش سری فوریه

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

سری فوریه

نمایش‌های مختلف سری فوریه

نمایش مثلثاتی

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

نمایش مختلط

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

نمایش کسینوس با فاز

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k cos(\omega_k t + \theta_k)$$

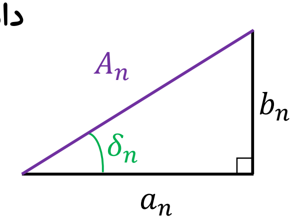
نمایش کسینوس با فاز

فرم مثلثاتی سری فوریه :

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

تعریف : $\frac{1}{2}a_0=A_0$

دامنه هارمونیک nاُم : $\sqrt{a_n^2+b_n^2}=A_n$



$$\cos\delta_n=\frac{a_n}{A_n}$$

$$\sin\delta_n=\frac{b_n}{A_n}$$

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\underbrace{\frac{a_n}{A_n}}_{\cos\delta_n}\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)+\underbrace{\frac{b_n}{A_n}}_{\sin\delta_n}\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p}-\delta_n\right)$$

نمایش مختلط سری فوریه

فرم مثلثاتی سری فوریه :

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{e^{i\frac{n\pi t}{p}}+e^{-i\frac{n\pi t}{p}}}{2}+b_n\frac{e^{i\frac{n\pi t}{p}}-e^{-i\frac{n\pi t}{p}}}{2i}$$

$$f(t)=\underbrace{\frac{1}{2}a_0}_{C_0}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{n\pi t}{p}}\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)}_{C_n}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-i\frac{n\pi t}{p}}\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right)}_{C_{-n}}$$

تعریف : C_0 C_n C_{-n}

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi t}{p}}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{C_{-n}e^{-i\frac{n\pi t}{p}}}_{-n\,\to\,n} \Rightarrow f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi t}{p}}+\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n e^{i\frac{n\pi t}{p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi t}{p}}}$$

فرم مختلط یا
فرم نمایی
سری فوریه

$C_n=?$

$\frac{1}{i}=-i$

$$C_n=\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}\int_d^{d+2p}f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt-i\frac{1}{p}\int_d^{d+2p}f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2p}\int_d^{d+2p}f(t)\left[\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)-i\sin\left(\frac{n\pi t}{p}\right)\right]dt \Rightarrow C_n=\frac{1}{2p}\int_d^{d+2p}f(t)\,e^{-i\frac{n\pi t}{p}}dt$$

مثال: فرم مختلط سری فوریه تابع $-1<t<1$ $f(t)=e^t$ را به‌دست آورید.

$$C_n=\frac{1}{2p}\int_d^{d+2p}f(t)\,e^{-i\frac{n\pi t}{p}}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{e^t\,e^{-in\pi}}_{e^{-(1+in\pi)t}}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-(1+in\pi)t}dt$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{-1}{2(1+in\pi)}e^{-(1+in\pi)t}\Big]_{-1}^{1}=\frac{-1}{2(1+in\pi)}\left[\underbrace{e^{-(1+in\pi)}}_{e^{-1}e^{-in}}-\underbrace{e^{(1+in\pi)}}_{e^{1}e^{in\pi}}\right]$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{-1}{2(1+in\pi)}\left[e^{-1}\cos n\pi-e^{1}\cos n\pi\right]=\frac{\cos n\pi}{(1+in\pi)}\underbrace{\left[\frac{e^1-e^{-1}}{2}\right]}_{\sinh 1}=\frac{\cos n\pi\ \sinh 1}{(1+in\pi)}$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{(-1)^n\sinh 1}{(1+in\pi)} \Rightarrow \boxed{f(t)=e^t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\sinh 1}{(1+in\pi)}e^{in\pi t}}$$

فرم مختلط
سری فوریه

نکته:

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ C_{-n} &= \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{aligned}\right\}$$

جمع : $\boxed{a_n = C_n + C_{-n}}$

تفریق : $\boxed{b_n = i(C_n - C_{-n})}$

تمرین: در مثال قبل، روابط مربوط به a_n و b_n را به‌کمک روابط بالا به‌دست آورید.

مثال: نشان دهید: $A_n = 2\sqrt{C_n C_{-n}}$

$$A_n = 2\sqrt{C_n C_{-n}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)\frac{1}{2}(a_n + ib_n)} = \sqrt{(a_n - ib_n)(a_n + ib_n)}$$

$$= \sqrt{a_n^2 + \underbrace{ia_nb_n - ia_nb_n}_{0} - i^2b_n^2} = \sqrt{a_n^2 - i^2b_n^2} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n$$

$$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir

رابطه اویلر

Euler Formula

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi \quad = \cos n\pi \quad = (-1)^n$$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n\pi) + i \sin(-n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$$