ریاضیات مهندسی

آنالیز فوریه
بخش پنجم ــ تبدیل فوریه

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

انتگرال فوریه

اگر تابع $f(t)$ تمام شرایط دیریشله به جز متناوب بودن را دارا باشد، آنگاه به‌جای بیان آن به‌فرم سری فوریه، آن را با انتگرال زیر موسوم به انتگرال فوریه نمایش می‌دهیم:

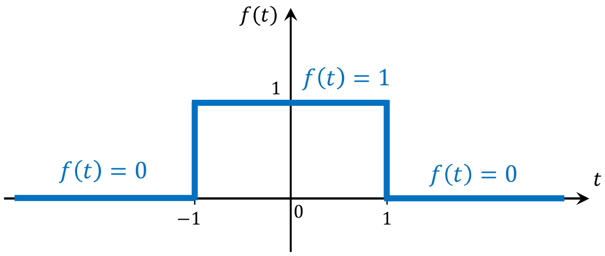
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$ ⇨ انتگرال فوریه $f(t)$

که

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$ ⇨ تبدیل فوریه یا اسپکتروم یا طیف $f(t)$

زوج تبدیل فوریه

مثال: انتگرال فوریه پالس زیر را بیابید



$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} e^{-i\omega t}\,dt = \frac{-1}{2\pi i\omega}e^{-i\omega t}\Big)_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{-1}{2\pi i\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right) = \frac{1}{\pi\omega}\left(\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\right) = \frac{\sin\omega}{\pi\omega}$$

انتگرال فوریه $\Rightarrow$ $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\pi\omega}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\pi\omega}}_{\text{زوج}}\,d\omega + i\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin\omega\sin\omega t}{\pi\omega}}_{\text{فرد}}\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega$$

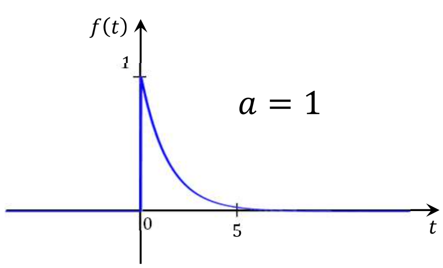
مثال: انتگرال فوریه پالس زیر را بیابید

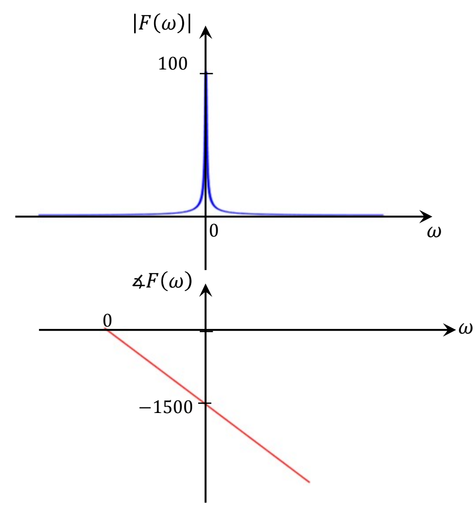
$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-at} & t\geq 0\end{cases} \qquad F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \overbrace{e^{-at}e^{-i\omega t}}^{e^{-(a+i\omega)t}}\,dt=\frac{-1}{2\pi(a+i\omega)}\underbrace{e^{-(a+i\omega)t}\Big)_{0}^{\infty}}_{-1} \Rightarrow F(\omega)=\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$$

انتگرال فوریه $\Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(a+i\omega)}d\omega$

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-at} & t\geq 0\end{cases} \qquad F(\omega)=\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$$





انتگرال فوریه توابع زوج و فرد

اگر تابع $f(t)$ تابعی زوج باشد، آنگاه داریم:

زوج تبدیل کسینوسی فوریه

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_C(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$$

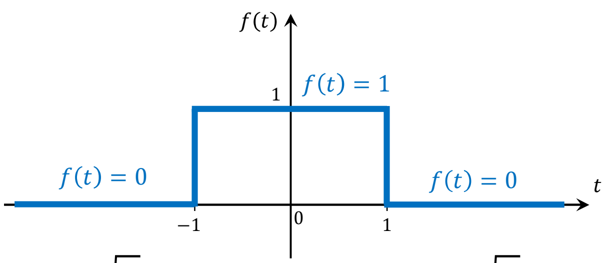
اگر تابع $f(t)$ تابعی فرد باشد، آنگاه داریم:

زوج تبدیل سینوسی فوریه

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_S(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

مثال: انتگرال فوریه پالس زیر را بیابید



$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1}\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big)_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

انتگرال فوریه

$$\Rightarrow f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega \Leftarrow$$

همان نتیجه به‌دست‌آمده در مثال قبل است

مثال: الف) تابع $f(t) = e^{-3|t|}$ را در نظر بگیرید و انتگرال فوریه این تابع را به‌دست آورید.

می‌دانیم تابع $f(t) = e^{-3|t|}$ تابعی زوج است پس برای آن داریم:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-3|t|} \cos \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-3t} \cos \omega t \, dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{3}{9 + \omega^2} \right)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx} f(x) dx = \mathcal{L}[f(x)]_{S=b} \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos \omega x \, dx = \underbrace{\mathcal{L}[\cos \omega x]_{S=3}}^{\mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^2 + a^2}} = \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right]_{S=3}$$

بنابراین انتگرال فوریه تابع $f(t) = e^{-3|t|}$ برابر است با:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

$$e^{-3|t|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{9 + \omega^2} \right) \cos \omega t \, d\omega$$

ب) به کمک قسمت (الف) حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 5\omega}{(9+\omega^2)}\,d\omega$$

در قسمت (الف) عبارت زیر را به‌دست آوردیم.

$$e^{-3|t|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{3}{9+\omega^2}\right)\cos\omega t\,d\omega$$

$$t=5 \;\to\; e^{-3|5|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{3}{9+\omega^2}\right)\cos 5\omega\,d\omega$$

$$\Rightarrow\; e^{-1} = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 5\omega}{9+\omega^2}\,d\omega \;\Rightarrow\; \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-15} = \int_0^{+\infty}\frac{\cos 5\omega}{9+\omega^2}\,d\omega$$

قضیه دیریشله (دیریکله)

اگر انتگرال فوریه تابع $f(t)$ را $g(t)$ بنامیم، آنگاه:

حاصل انتگرال فوریه در نقاط پیوسته با مقدار تابع در آن نقاط برابر است، یعنی: $f(t_1)=g(t_1)$

و

حاصل انتگرال فوریه در نقاط ناپیوسته برابر با نقطه میانی ناپیوستگی در آن نقاط است، یعنی:

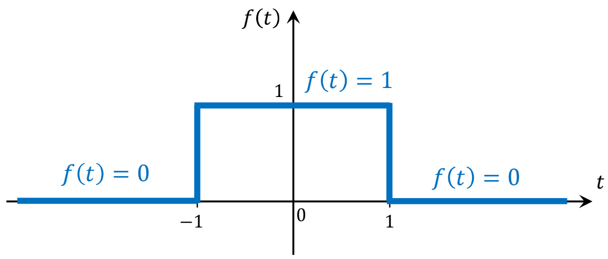
$$g(t_1) = \frac{f(t_1+\varepsilon)+f(t_1-\varepsilon)}{2} \qquad \varepsilon\to 0$$

$f(t+\varepsilon)$: مقدار تابع $f(t)$ بلافاصله پس از ناپیوستگی

$f(t-\varepsilon)$: مقدار تابع $f(t)$ بلافاصله قبل از ناپیوستگی

مثال: به‌کمک انتگرال فوریه پالس مثال قبل، ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$



قبلاً دیدیم $\Rightarrow$ $$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} \cos\omega t\, d\omega$$

چون $t = 0$ جزو نقاط پیوسته تابع $f(t)$ است $\Rightarrow$ $$\text{انتگرال فوریه}\Big)_{t=0} = f(0) \rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = 1$$

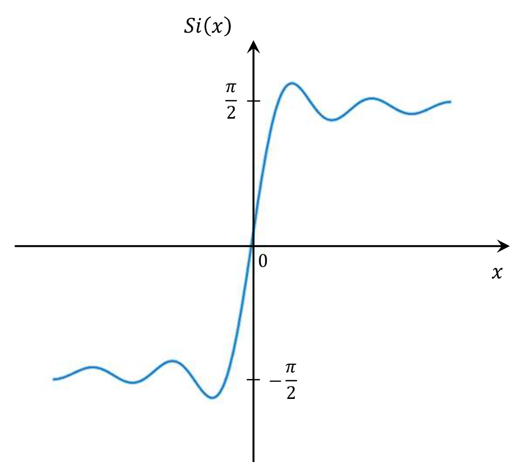
$$\rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

تابع انتگرال سینوسی

$$Si(x) = \int_0^{x} \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$Si(0) = 0$$

$$Si(\infty) = \frac{\pi}{2}$$



مثال: هر کدام از انتگرال‌های زیر را بر حسب تابع Si بیان کنید

(الف) $I = \int_a^b \frac{\sin x^n}{x} dx$

$x^n = u \quad \rightarrow \quad nx^{n-1}dx = du$

$dx = \frac{du}{nx^{n-1}} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{nx^n} = \frac{du}{nu}$

$$= \frac{1}{n}\int_{a^n}^{b^n} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{n}\left[\int_{a^n}^{0} \frac{\sin u}{u} du + \int_0^{b^n} \frac{\sin u}{u} du\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int_0^{b^n} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{a^n} \frac{\sin u}{u} du\right] = \frac{1}{n}[Si(b^n) - Si(a^n)]$$

مثال: هر کدام از انتگرال‌های زیر را بر حسب تابع Si بیان کنید

(ب) $I = \int_a^b \frac{\sin x}{x^3} dx$

انتگرال‌گیری جزء به جزء $\begin{cases} \sin x = u \rightarrow \cos x\, dx = du \\ \frac{dx}{x^3} = dv \rightarrow \frac{-1}{2x^2} = v \end{cases}$

انتگرال‌گیری جزء به جزء $\begin{cases} \cos x = u \rightarrow -\sin x\, dx = du \\ \frac{dx}{x^2} = dv \rightarrow \frac{-1}{x} = v \end{cases}$

$$= \underbrace{-\frac{\sin x}{2x^2}\Big)_a^b}_{\text{عدد } \alpha} + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$

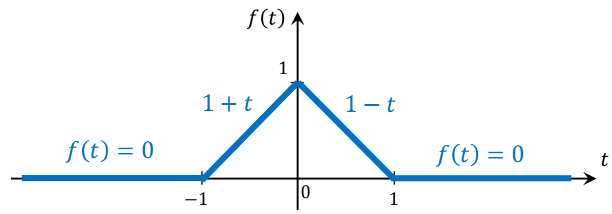
$$= \alpha + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx = \alpha + \frac{1}{2}\left[\underbrace{-\frac{\cos x}{x}\Big)_a^b}_{\text{عدد } \beta} - \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right]$$

$\int_0^b \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$

$$= \alpha + \frac{1}{2}[\beta - Si(b) + Si(a)]$$

مثال: انتگرال فوریه تابع زیر را حساب کنید

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<-1\\ 1+t & -1\le t<0\\ 1-t & 0\le t<+1\\ 0 & x\ge +1\end{cases}$$



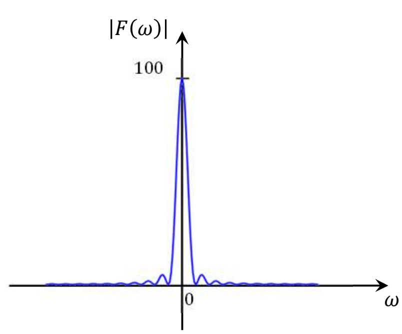
$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1}(1-t)\cos\omega t\,dt$$

$$\begin{cases}1-t=u\ \rightarrow -dt=du\\ \cos\omega t\,dt=dv\rightarrow\ \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t=v\end{cases}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\underbrace{\left.\frac{1-t}{\omega}\sin\omega t\right)_0^1}_{\text{صفر}}\right]+\frac{1}{\omega}\int_0^1\sin\omega t\,dt$$

$$\Rightarrow\ F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega}\int_0^1\sin\omega t\,dt=-\frac{1}{\omega^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\omega t\Big)_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}$$

انتگرال فوریه $\Rightarrow$ $f(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}F(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\cos\omega t\,d\omega$



مثال: با استفاده از نتیجه مثال قبل نشان دهید که:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه مثال قبل ⟸ $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega^2} \cos\omega t \, d\omega$

چون $t=0$ جزو نقاط پیوسته تابع $f(t)$ است ⟸ $\text{انتگرال فوریه}\Big)_{t=0} = f(0) = 1 \rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega^2} d\omega = 1$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

مثال: با استفاده از نتیجه مثال قبل نشان دهید که:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

نتیجه مثال قبل ⟸ $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} = \overbrace{\frac{\cos\omega - 1}{\omega}\Big)_0^{\infty}}^{\text{صفر}} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega$

انتگرال‌گیری جزء به جزء $\begin{cases} 1-\cos\omega = u \rightarrow \sin\omega \, d\omega = du \\ \frac{d\omega}{\omega^2} = dv \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{\omega} = v \end{cases}$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

اگر $f(x)$ تابعی باشد که در فاصله $(0, +\infty)$ تعریف شده است و در این فاصله پیوسته تکه‌ای و مطلقاً انتگرال پذیر باشد، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

می‌توانیم آن را به‌صورت زوج یا فرد گسترش دهیم.

انتگرال فوریه کسینوسی

برای نوشتن انتگرال فوریه کسینوسی یا همان بسط زوج تابع مثل تابع زوج رفتار می‌کنیم:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega) = 0$$

$$f_c(x) = \int_{0}^{+\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

انتگرال فوریه سینوسی

برای نوشتن انتگرال فوریه سینوسی یا همان بسط فرد تابع مثل تابع فرد رفتار می‌کنیم:

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$f_s(x) = \int_0^{+\infty} B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

مثال: الف) انتگرال فوریه کسینوسی یا همان بسط زوج تابع $f(x) = e^{-2x}$ به‌ازای $x > 0$ را به‌دست آورید.

چون انتگرال فوریه کسینوسی می‌خواهیم پس $B(\omega) = 0$ و $A(\omega)$ برای داریم:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{2^2+\omega^2}\right) = \frac{4}{\pi(4+\omega^2)}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos\omega x\,dx = \underbrace{\mathcal{L}[\cos\omega x]_{S=2}}^{\mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^2+a^2}} = \left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]_{S=2}$$

$$f_c(x) = \int_0^{+\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{4}{\pi(4+\omega^2)}\cos\omega x\,d\omega$$

ب) انتگرال فوریه سینوسی یا همان بسط فرد تابع $f(x) = e^{-2x}$ به‌ازای $x > 0$ را به‌دست آورید.

چون انتگرال فوریه سینوسی می‌خواهیم پس $A(\omega) = 0$ و $B(\omega)$ برای داریم:

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega}{2^2+\omega^2}\right) = \frac{2\omega}{\pi(4+\omega^2)}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx}f(x)dx = \mathcal{L}[f(x)]_{S=b} \to \int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin\omega x\,dx = \overbrace{\mathcal{L}[\sin\omega x]_{S=2}}^{\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^2+a^2}} = \left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]_{S=2}$$

$$\Rightarrow f_s(x) = \int_0^{+\infty} B(\omega)\sin\omega x\,d\omega = \int_0^{+\infty}\frac{2\omega}{\pi(4+\omega^2)}\sin\omega x\,d\omega$$

پ) به‌کمک نتیجه قسمت (ب) مقدار انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin 5\omega}{(4+\omega^2)}d\omega$$

در قسمت (ب) به‌جای x مقدار 5 را قرار دهیم:

$$f_s(x) = \int_0^{+\infty}\frac{2\omega}{\pi(4+\omega^2)}\sin\omega x\,d\omega \Rightarrow f(5) = \int_0^{+\infty}\frac{2\omega}{\pi(4+\omega^2)}\sin 5\omega\,d\omega$$

$$e^{-2(5)} = e^{-1} \quad = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\omega}{(4+\omega^2)}\right)\sin 5\omega\,d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}e^{-10} = \int_0^{+\infty}\frac{\omega}{4+\omega^2}\sin 5\omega\,d\omega$$

تمرین: با استفاده انتگرال فوریه مناسب درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega + \omega\sin\omega - 1}{\omega^2} \cos\omega t \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} t & 0 \le t < 1 \\ \frac{\pi}{4} & t = 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

قضیه پارسوال برای انتگرال فوریه:

فرض کنیم نمایش انتگرال فوریه تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x] d\omega$$

در این‌صورت، تساوی پارسوال به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)]^2 dx = \int_0^{+\infty} [A^2(\omega) + B^2(\omega)] d\omega$$

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir