ریاضیات مهندسی

اعداد مختلط
بخش دوم ـ مجموعه اعداد مختلط

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

معرفی اعداد مختلط

$x^2+1=0 \rightarrow x \in \mathbb{C}$ ⇨ $x^2=-1 \rightarrow x=\sqrt{-1}=i=j$

$\boxed{i=\sqrt{-1}}$ واحد مختلط

$\mathbb{C}=\{a+ib|a,b \in \mathbb{R}\}$

$Z=a+ib \qquad Z \in \mathbb{C}$

- a : بخش حقیقی Z $=\Re(Z)=Re(Z) \qquad (a \in \mathbb{R})$
- b : بخش موهومی Z $=\Im(Z)=Im(Z) \qquad (b \in \mathbb{R})$

$Z=a+ib \qquad Z \in \mathbb{C}$

- $if \;\; a=0 \rightarrow Z=ib$ موهومی محض
- $if \;\; b=0 \rightarrow Z=a$ حقیقی محض

معرفی اعداد مختلط

$$Z = 3 - 2i \begin{cases} \Re(Z) = Re(Z) = 3 \\ \Im(Z) = Im(Z) = -2 \end{cases}$$

$$Z = 3i \begin{cases} \Re(Z) = Re(Z) = 0 \\ \Im(Z) = Im(Z) = 3 \end{cases}$$

$$Z = -2 \begin{cases} \Re(Z) = Re(Z) = -2 \\ \Im(Z) = Im(Z) = 0 \end{cases}$$

$$Z = 2 - i \begin{cases} \Re(Z) = Re(Z) = 2 \\ \Im(Z) = Im(Z) = -1 \end{cases}$$

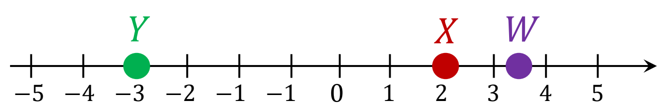
$$Z = -i \begin{cases} \Re(Z) = Re(Z) = 0 \\ \Im(Z) = Im(Z) = -1 \end{cases}$$

نمایش اعداد مختلط

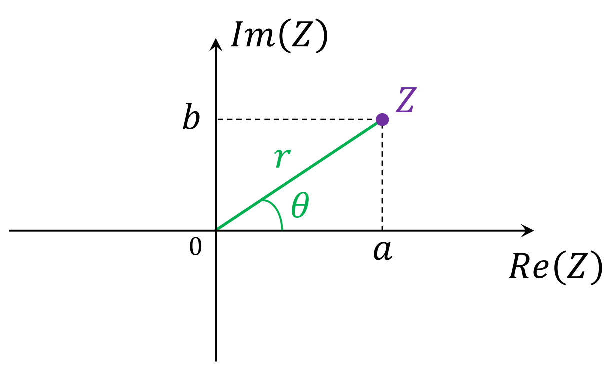
$X = 2$

$Y = -3$

$W = 3.5$



$Z = a + ib$

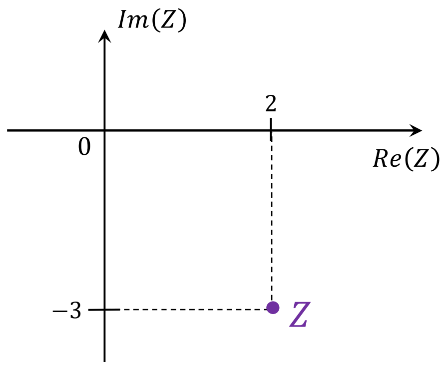


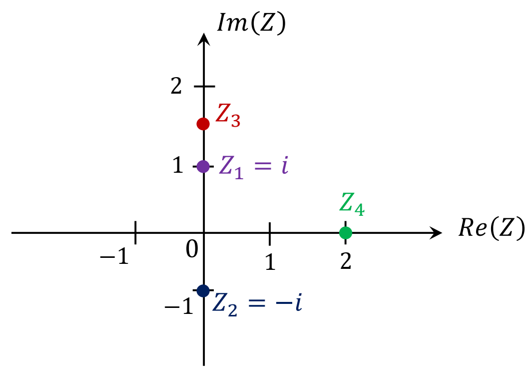
نمایش اعداد مختلط

$Z = 2 - 3i$

$Z_1 = i$ $\quad Z_2 = -i$ $\quad Z_3 = 1.5i$

$Z_4 = 2$





تساوی دو عدد مختلط

دو عدد مختلط را مساوی گویند اگر و تنها اگر هم قسمت‌های حقیقی و هم قسمت‌های موهومی آنها برابر باشند.

$$Z_1 = Z_2 \quad \Leftrightarrow \quad Re(Z_1) = Re(Z_2) \quad , \quad Im(Z_1) = Im(Z_2)$$

مثال: **معادله مختلط زیر را حل کنید:**

$$x^2 + (2x + y)i = 4 - 3i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \quad \Rightarrow x = \pm 2 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2 - 7i \\ -2 + i \end{matrix}$$

تساوی دو عدد مختلط

مثال: معادله مختلط زیر را حل کنید:

$$(x+y+2)+i(x^2+y)=0$$

$$(x+y+2)+i(x^2+y)=0+0i \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ x^2+y=0 \Rightarrow y=-x^2 \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله اول

$$\Rightarrow -x^2+x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-1 \\ y_2=-4 \end{cases}$$

تساوی دو عدد مختلط

مثال: معادله مختلط زیر را حل کنید:

$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0$$

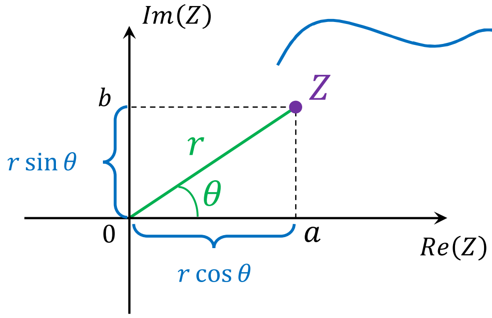
$\cosh y \neq 0$

$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0+0i \Rightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \\ \cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \sinh y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sinh y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{با حل توأم معادلات}} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x+iy=k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$$

فرم قطبی اعداد مختلط



$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

$$Z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

رابطه اویلر $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= |Z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta &= \arg(Z) = \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{aligned}}$$

$-\pi < \theta \leq \pi$ یا $\theta \in (-\pi, \pi]$

فرم قطبی اعداد مختلط

$Z = a + ib$

$Z = re^{i\theta}$

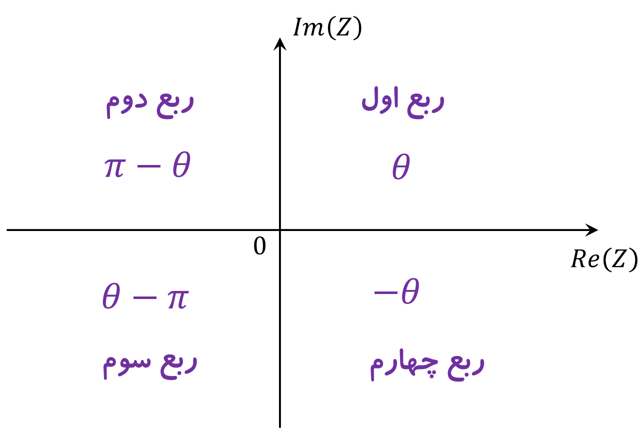
$$r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \arg(Z) = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$$

$-\pi < \theta \leq \pi$ یا $\theta \in (-\pi, \pi]$

$\theta = Arg\,(Z)$: آرگومان اصلی

آرگومان فرعی : $\arg(Z) = Arg\,(Z) + 2k\pi$



فرم قطبی اعداد مختلط

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را به‌دست آورید.

(الف) $Z_1 = 3 + 3i$ $\Rightarrow$ $r = |Z_1| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\theta = \arg(Z_1) = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{3}{3}\right| = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = a + ib \begin{cases} a = r\cos\theta = 3\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \\ b = r\sin\theta = 3\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = re^{i\theta} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$$

فرم قطبی اعداد مختلط

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را به‌دست آورید.

(ب) $Z_2 = -3 + \sqrt{3}i$ $\Rightarrow$ $r = |Z_2| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\theta = \arg(Z_2) = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-3}\right| = \frac{\pi}{6} \quad \to \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad Z_2 = a + ib \begin{cases} a = r\cos\theta = 2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} \\ b = r\sin\theta = 2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Z_2 = re^{i\theta} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)}$$

فرم قطبی اعداد مختلط

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را به‌دست آورید.

(پ) $Z_3 = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow Z_3 = a + ib \begin{cases} a = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} \\ b = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_3 = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}$$

فرم قطبی اعداد مختلط

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را به‌دست آورید.

(ت) $Z_4 = -1 - \sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \frac{\pi}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow Z_4 = a + ib \begin{cases} a = r\cos\theta = 2\cos\frac{-2\pi}{3} \\ b = r\sin\theta = 2\sin\frac{-2\pi}{3} \end{cases}$$

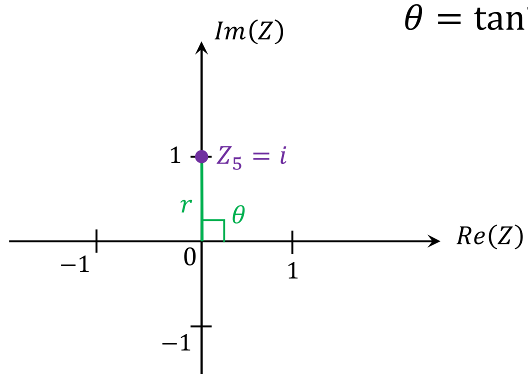
$$\Rightarrow Z_4 = re^{i\theta} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{-i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)}$$

فرم قطبی اعداد مختلط

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را به‌دست آورید.

(ث) $Z_5 = i \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{1}{0}\right| = \frac{\pi}{2}$$



$$\Rightarrow Z_5 = a + ib \begin{cases} a = r\cos\theta = 1\cos\frac{\pi}{2} \\ b = r\sin\theta = 1\sin\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

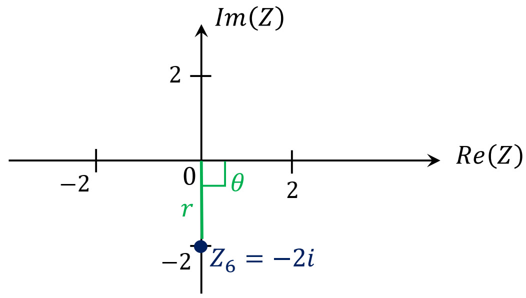
$$\Rightarrow Z_5 = re^{i\theta} = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = 1e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

فرم قطبی اعداد مختلط

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را به‌دست آورید.

(ث) $Z_6 = -2i \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{0}\right| = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$



$$\Rightarrow Z_6 = a + ib \begin{cases} a = r\cos\theta = 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ b = r\sin\theta = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

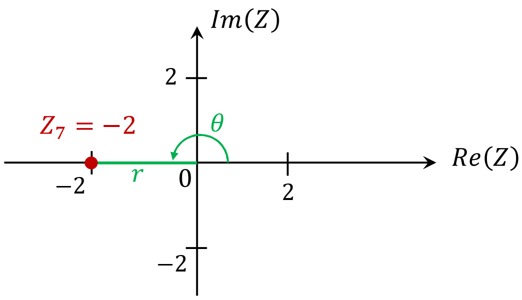
$$\Rightarrow Z_6 = re^{i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

فرم قطبی اعداد مختلط

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را به‌دست آورید.

(ث) $Z_7 = -2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{0}{-2}\right| = 0 \quad \rightarrow \theta = \pi$$



$$\Rightarrow Z_7 = a + ib \begin{cases} a = r\cos\theta = 2\cos(\pi) \\ b = r\sin\theta = 2\sin(\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_7 = re^{i\theta} = 2e^{i\pi} = 2e^{i(\pi+2k\pi)}$$

اعمال روی اعداد مختلط

۱– حاصل جمع:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

۲– تفریق:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

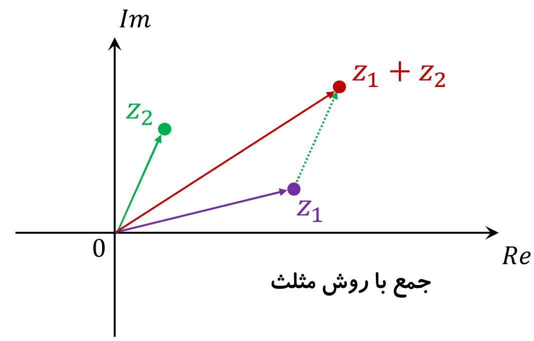
۳– حاصل‌ضرب:

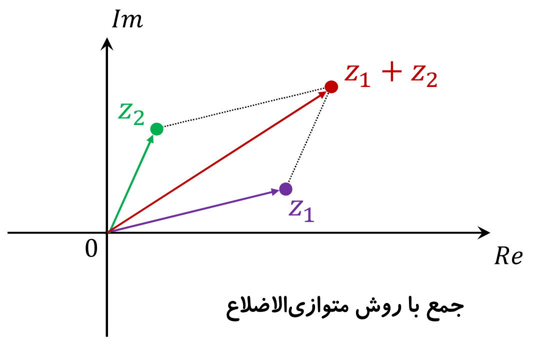
$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z = z_1 \times z_2 = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$$

$$\rightarrow z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

اعمال روی اعداد مختلط

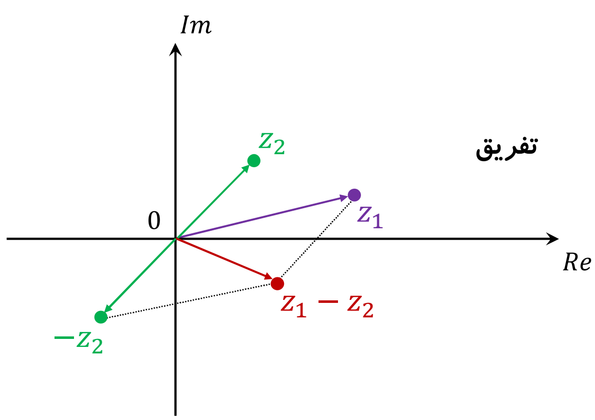
نکته (نمایش هندسی جمع و تفریق دو عدد مختلط)





اعمال روی اعداد مختلط

نکته (نمایش هندسی جمع و تفریق دو عدد مختلط)



اعمال روی اعداد مختلط

۴– مزدوج یک عدد مختلط:

$$Z = x + iy \Rightarrow Z^* = \bar{Z} = x - iy$$

$z = -2 - 5i \rightarrow z^* = \bar{z} = -2 + 5i$

$z = 2i \rightarrow z^* = \bar{z} = -2i$

$z = 5i - 3 \rightarrow z^* = \bar{z} = -5i - 3$

$z = 7 \rightarrow z^* = \bar{z} = 7$

۵– قرینه (منفی) یک عدد مختلط:

$$Z = x + iy \Rightarrow -Z = -x - iy$$

$z = -2 - 5i \rightarrow -z = +2 + 5i$

$z = 2i \rightarrow -z = -2i$

$z = 5i - 3 \rightarrow -z = -5i + 3$

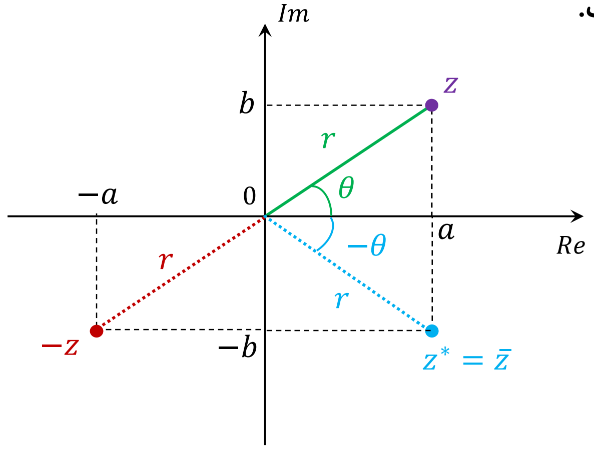
$z = 7 \rightarrow -z = -7$

اعمال روی اعداد مختلط

نکته ۱: (نمایش هندسی قرینه و مزدوج یک عدد مختلط)

$z^* = \bar{z}$ قرینه z نسبت به محور افقی (محور Re) است.

$-z$ قرینه z نسبت به مبدأ مختصات است.



$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^* = \bar{z} = re^{-i}$$

اعمال روی اعداد مختلط

نکته ۲:

$$z = x + iy \;\rightarrow\; z^* = \bar{z} = x - iy$$

1. $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \;\rightarrow\; x = Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

2. $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy \;\rightarrow\; y = Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

3. $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

(الف) $$(5 + 3i)(2 - 7i) = 10 - 35i + 6i - 21i^2 = 10 - 35i + 6i + 21$$
$$= (10 + 21) + (-35 + 6)i = 31 - 29i$$

(ب) $$\frac{2 + 3i}{5 - 7i} \times \frac{5 + 7i}{5 + 7i} = \frac{10 + 14i + 15i + 21i^2}{5^2 + 7^2} = \frac{10 + 14i + 15i - 21}{25 + 49}$$
$$= \frac{(10 - 21) + (14 + 15)i}{74} = \frac{-11}{74} + \frac{29}{74}i$$

اعمال روی اعداد مختلط

۶– خارج قسمت (تقسیم):

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned} \Rightarrow z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - y_2x_1)}{\underbrace{x_2^2 - (iy_2)^2}_{x_2^2 + {y_2}^2}}$$

$$\rightarrow z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + {y_2}^2}$$

۷– اندازه عدد مختلط:

$$Z = x + iy \quad \Rightarrow \quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = 3 - 7i \quad \rightarrow \quad |z| = \sqrt{3^2 + (-7)^2}$$

اعمال روی اعداد مختلط

۸– ضرب دو عدد مختلط به‌فرم نمایی

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad \Rightarrow z = z_1 \times z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \;, \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

۹– خارج قسمت (تقسیم) دو عدد مختلط به‌فرم نمایی

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad \Rightarrow z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \;, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

اعمال روی اعداد مختلط

۱۰- به توان رساندن عدد مختلط

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in} \quad \Rightarrow \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

فرمول دموآور

$$\boxed{z^{-n} = \frac{1}{z^n}}$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: مقادیر $(1-i)^3$ و $(1-i)^{-3}$ را محاسبه کنید.

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \sqrt{2^3}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{8}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2 - 2i$$

$$(1-i)^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: مقادیر i^{103} و i^{-7} را محاسبه کنید.

$$i=\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad i^1=i \qquad i^2=-1 \qquad i^3=-i \qquad i^4=1$$

$$i^3 = i^{103} = -i \qquad\qquad i^{-78} = i^{-80} i^2 = -1$$

نکته: توان i

- اگر توان i زوج باشد
  - اگرتوان i بر ۴ بخش‌پذیر باشد، حاصل ۱ می‌شود. $(i^{16}=1)$
  - اگرتوان i بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، حاصل ۱ـ می‌شود. $(i^{18}=-1)$
- اگر توان i فرد باشد
  ابتدا یکی از توان کم می‌کنیم
  - اگر عدد حاصل تفریق، بر ۴ بخش‌پذیر باشد، حاصل i می‌شود. $(i^{17}=i)$
  - اگر عدد حاصل تفریق، بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، حاصل $-i$ می‌شود. $(i^{19}=-i)$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: حاصل عبارت $\frac{3i^{30}-i^{19}}{5i+1}$ را به‌دست آورید.

$$\frac{3i^{30}-i^{19}}{5i+1} = \frac{-3+i}{5i+1}$$

$$\frac{-3+i}{5i+1} \times \frac{-5i+1}{-5i+1} = \frac{15i-3-5i^2+i}{5^2+1^2} = \frac{15i-3+5+i}{25+1} = \frac{(-3+5)+(15+1)i}{26}$$

$$= \frac{2+16i}{26} = \frac{2}{26} + \frac{16}{26}i = \frac{1}{13} + \frac{8}{13}i$$

اعمال روی اعداد مختلط

۱۱– ریشه یک عدد مختلط

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

n ریشه که روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ و به فاصله‌های مساوی از هم واقع هستند.

$\boxed{k = 0 \quad \rightarrow \quad \text{ریشه اصلی}}$

اعمال روی اعداد مختلط

نکته ۱: در محاسبه ریشه n یک عدد مختلط،برای n مقدار متوالی k باید محاسبات را انجام دهیم، چرا که به‌ازای دیگر مقادیر k مجدداً ریشه‌ها تکرار می‌گردند یعنی جوابی که به‌ازای $k = n$ به‌دست می‌آید با جواب $k = 0$ یکسان است. پس هر عدد مختلط n ریشه nاُم دارد.

نکته ۲: تمام این n ریشه روی محیط دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $r^{\frac{1}{n}}$ قرار دارند و زاویه‌ای که دو ریشه متوالی با هم می‌سازند برابر با $\frac{2\pi}{n}$ است.

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: ریشه‌های چهارم عدد $z=-1$ را به‌دست آورید.

ریشه‌های چهارم عدد $z=-1$ $\rightarrow \sqrt[4]{-1} \rightarrow z=-1\begin{cases} r=1 \\ \theta=\pi \end{cases}$

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{-1}=(-1)^{\frac{1}{4}}=\left(1e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{4}}=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)=w \qquad k=0,1,2,3$$

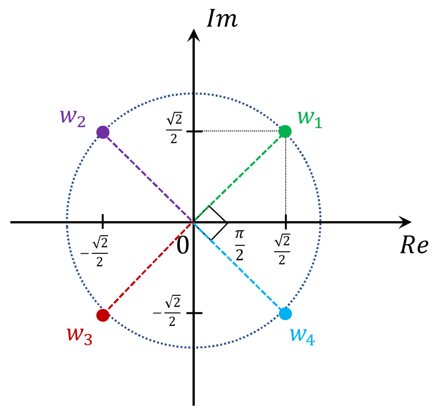
$$w=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \qquad k=0,1,2,3$$

$$k=0 \rightarrow w_1=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$k=1 \rightarrow w_2=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$k=2 \rightarrow w_3=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

$$k=3 \rightarrow w_4=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$



اعمال روی اعداد مختلط

نکته (محاسبه $Z^{\frac{m}{n}}$ هنگامی که m و n فاقد مضرب مشترک باشند):

$$Z^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} (Z^m)^{\frac{1}{n}} & \rightarrow \text{ابتدا } Z^m \text{ را حساب کرده، سپس ریشه‌های } n\text{اُم آن را محاسبه می‌کنیم.} \\ \left(Z^{\frac{1}{n}}\right)^m & \rightarrow \text{ابتدا ریشه‌های } n\text{اُم عدد } Z \text{ را حساب کرده، سپس هریک را به توان } n \text{ می‌رسانیم.} \end{cases}$$

** از هر دو روش جواب‌های یکسانی به‌دست می‌آید که تعداد آن‌ها n تا است.

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: کلیه مقادیر $(2-2i)^{3/5}$ را به‌دست آورید.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(2-2i)^3 = -16-16i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{512} \\ \theta = \dfrac{-3\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \sqrt{512}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}+2k\pi\right)}$$

$$\Rightarrow (2-2i)^{3/5} = \left((2-2i)^3\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\sqrt{512}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}+2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[10]{512}\, e^{i\left(\frac{-3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$$

$k = 0,1,2,3,4$

** در این مثال می‌توانستیم ابتدا مقدار $(2-2i)^{1/5}$ را محاسبه کرده و سپس مقادیر آن را به‌توان ۳ برسانیم.

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: با استفاده از اتحاد دموآور، روابطی برای $\sin 3\theta$ و $\cos 3\theta$ بر حسب توان‌های $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به‌دست آورید.

اتحاد دموآور: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

اتحاد دموآور را برای $n=3$ می‌نویسیم $\rightarrow\ (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$$\rightarrow \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos 3\theta \\ 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = \sin 3\theta \end{cases}$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: با استفاده از فرمول اویلر، روابطی برای $\cos^3\theta$ و $\sin^3\theta$ را بر حسب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ به‌دست آورید.

$$\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta}+e^{-i}\ \right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{8}(2\cos 3\theta + 6\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

$$\sin^3\theta = \frac{1}{-8i}\left(e^{i\theta}-e^{-i}\ \right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{3i}\ - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}\right)$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: ثابت کنید که اگر $z_1 + z_2$ و $z_1 z_2$ حقیقی باشند، آنگاه یا z_1 و z_2 هر دو حقیقی هستند یا $z_1 = \bar{z}_2$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{z_1 + z_2}_{\text{حقیقی}} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \Rightarrow y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -y_2$$

$$\underbrace{z_1 z_2}_{\text{حقیقی}} = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \Rightarrow x_1\underbrace{y_2}_{-y_1} + x_2y_1 = 0$$

$$\Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow z_1 \text{ و } z_2 \text{ حقیقی هستند} \\ x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1 \xrightarrow{y_1 = -y_2} z_1 = \bar{z}_2 \end{cases}$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: مطلوب است محاسبه $Im(z^3 - 2z)$ و $Re(z^3 - 2z)$

$$z = x + iy$$

$$z^3 - 2z = (x + iy)^3 - 2(x + iy) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 - 2x - 2iy$$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= \underbrace{(x^3 - 3xy^2 - 2x)}_{Re} + i\underbrace{(3xy^2 - y^3 - 2y)}_{Im}$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: ثابت کنید: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$$\begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

نکته: مشابه نتیجه بالا برای عملیات دیگر نیز وجود دارد.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\, \bar{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: نشان دهید: $\overline{\left[\frac{(3+7i)^2}{8-6i}\right]} = \frac{(3-7i)^2}{8+6i}$

$$\overline{\left[\frac{(3+7i)^2}{8-6i}\right]} = \frac{\overline{(3+7i)^2}}{\overline{(8-6i)}} = \frac{\overline{(3+7i)(3+7i)}}{\overline{(8-6i)}} = \frac{(3-7i)^2}{(8+6i)}$$

مثال: معادله $z\bar{z} - (z - \bar{z}) = 0$ را حل کنید.

$$z = x + iy$$

$$z\bar{z} - (z - \bar{z}) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 - 2iy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ -2y = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

جواب معادله : $z = 0$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: نشان دهید اگر برای اعداد مختلط z_1 و z_2 داشته باشیم: $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$ آنگاه z_1 و z_2 بر هم عمودند.

❖ روش اول (دکارتی):

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0 \Rightarrow (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1x_2 - \cancel{ix_1y_2} + \cancel{ix_2y_1} + y_1y_2 + x_1x_2 + \cancel{ix_1y_2} - \cancel{ix_2y_1} + y_1y_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 0 \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{y_1}{x_1}}_{z_1 \text{ شیب بردار}} \underbrace{\frac{y_2}{x_2}}_{z_2 \text{ شیب بردار}} = -1 \Rightarrow z_1 \perp z_2$$

اعمال روی اعداد مختلط

مثال: نشان دهید اگر برای اعداد مختلط z_1 و z_2 داشته باشیم: $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$ آنگاه z_1 و z_2 بر هم عمودند.

❖ روش دوم (قطبی):

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0 \Rightarrow r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$$
$$+ r_1r_2(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = 0$$

بعد از محاسبات $\Rightarrow \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow \underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{\theta_2 \text{ و } \theta_1 \text{ زاویه بین}} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z_1 \perp z_2$

قضایای مربوط به قدر مطلق اعداد مختلط

$z = x + iy \;\rightarrow\; |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

1. $|z| \geq x$ و $|z| \geq y$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$
4. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$: نامساوی مثلث
7. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

تعمیم نامساوی مثلث

قضایای مربوط به قدر مطلق اعداد مختلط

مثال: نشان دهید که در رابطه $w = \frac{z+i}{iz+1}$ اگر $|w| \leq 1$ باشد، آن‌گاه $Im(z) \leq 0$ می‌گردد.

$$z = x + iy \quad \rightarrow w = \frac{z+i}{iz+1} = \frac{(x+iy)+i}{i(x+iy)+1} = \frac{x+i(y+1)}{(1-y)+ix}$$

$$\Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + \underbrace{(y+1)^2}_{1+y^2+2y} \leq \underbrace{(1-y)^2}_{1+y^2-2y} + x^2$$

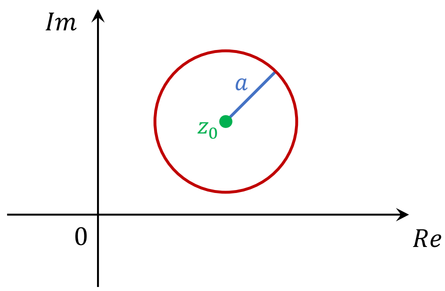
$$\rightarrow \quad 2y \leq -2y \quad \rightarrow \quad 4y \leq 0 \quad \rightarrow \quad y \leq 0 \quad \Rightarrow Im(z) \leq 0$$

شکل‌های هندسی در صفحه اعداد مختلط

مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط (صفحه Z) را مشخص کنید که توسط رابطه زیر بیان می‌شود.

$$|z - z_0| = a \qquad z = x + iy \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) \;\rightarrow\; |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = a$$



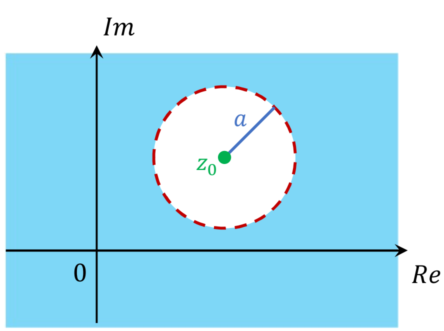
$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

مکان هندسی دایره‌ای به مرکز $z_0 = x_0 + iy_0$ و شعاع a

شکل‌های هندسی در صفحه اعداد مختلط

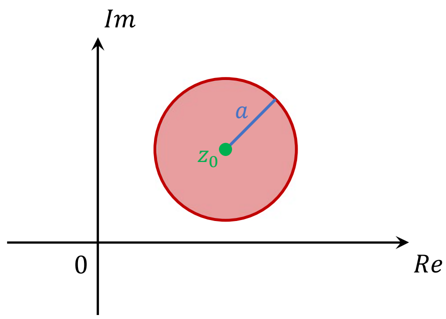
$|z - z_0| = a \quad \Rightarrow$ مکان هندسی نقاط روی دایره‌ای به مرکز $z_0 = x_0 + iy_0$ و شعاع a

$|z - z_0| > a \quad \Rightarrow$ مکان هندسی نقاط بیرون دایره‌ای به مرکز $z_0 = x_0 + iy_0$ و شعاع a



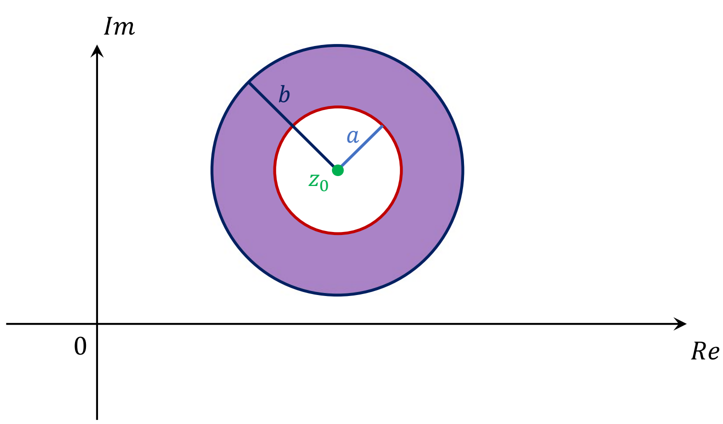
شکل‌های هندسی در صفحه اعداد مختلط

$|z - z_0| \leq a \quad \Rightarrow$ مکان هندسی نقاط دورن و روی دایره‌ای به مرکز $z_0 = x_0 + iy_0$ و شعاع a



شکل‌های هندسی در صفحه اعداد مختلط

$a \leq |z - z_0| \leq b \quad \Rightarrow$ مکان هندسی نقاط بین دو دایره هم‌مرکز به مرکز $z_0 = x_0 + iy_0$ و شعاع‌های a و b که $(a < b)$



شکل‌های هندسی در صفحه اعداد مختلط

مکان هندسی نقاط روی یک بیضی به کانون‌های ۱ و ۱- $|z+1|+|z-1|=2a \quad ,a>1 \Rightarrow$

مکان هندسی نقاط درون و روی یک بیضی به کانون‌های ۱ و ۱- $|z+1|+|z-1|\leq 2a \quad ,a>1 \quad \Rightarrow$

مکان هندسی کلیه نقاطی که از $z_1=-1$ و $z_2=1$ به یک فاصله هستند یا به‌عبارت دیگر عمودمنصف پاره‌خط z_1z_2 یا همان محور موهومی $|z+1|=|z-1| \quad \Rightarrow$

شکل‌های هندسی در صفحه اعداد مختلط

مثال: نشان دهید که مکان هندسی نقاطی که در آن $\frac{|z-1|}{|z+1|}=k$ است $(k\neq 1)$ دایره می‌باشد.
در حال خاص اگر $k=1$ و $k=0$ باشد، مکان هندسی چیست؟

$$z=x+iy \qquad z-1=(x-1)+iy \qquad z+1=(x+1)+iy$$

$$\frac{|z-1|}{|z+1|}=\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=k \quad \rightarrow \underbrace{(x-1)^2}_{x^2+1-2x}+y^2=k^2[\underbrace{(x+1)^2}_{x^2+1+2x}+y^2]$$

$$\rightarrow (1-k^2)x^2-2(1+k^2)x+(1-k^2)y^2+(1-k^2)=0$$

$$\rightarrow (1-k^2)x^2 - 2(1+k^2)x + (1-k^2)y^2 + (1-k^2) = 0 \qquad ✻$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } 1-k^2 \neq 0} x^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}x + y^2 + 1 = 0$$

تبدیل به مربع کامل:

$$x^2 - 2bx = x^2 - 2bx + b^2 - b^2 = (x-b)^2 - b^2$$

$$\rightarrow\ x^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}x + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$\rightarrow \left[x - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right]^2 + y^2 = \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1 \rightarrow$$ معادله یک دایره

مرکز دایره : $\begin{cases} \frac{1+k^2}{1-k^2} \\ 0 \end{cases}$

شعاع دایره = $\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1}$

$$\rightarrow \left[x - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right]^2 + y^2 = \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1 \rightarrow$$ معادله یک دایره

مرکز دایره : $\begin{cases} \frac{1+k^2}{1-k^2} \\ 0 \end{cases}$

شعاع دایره = $\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1}$

✻✻ بررسی حالت‌های خاص

(الف) $k = 1 \rightarrow$ ✻ از معادله $\rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow$ مکان هندسی همان محور موهومی است.

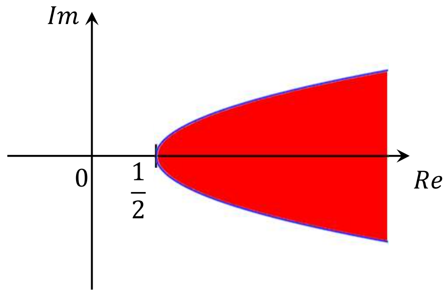
(ب) $k = 0 \rightarrow$ با جایگذاری در معادله دایره $\rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 0 \rightarrow$ مکان هندسی نقطه $z = 1$ است.

شکل‌های هندسی در صفحه اعداد مختلط

مثال: چه ناحیه‌ای از صفحه Z توسط رابطه $|z-1| \leq Re(z)$ توصیف می‌گردد؟

$$z = x + iy \qquad z - 1 = (x-1) + iy \rightarrow |z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq x$$

$$\rightarrow \underbrace{(x-1)^2}_{x^2+1-2x} + y^2 \leq x^2 \rightarrow 1 - 2x + y^2 \leq 0 \rightarrow y^2 \leq 2x - 1$$



All

Need to Know,

I Learned in

Kindergarten

__ *Robert Fulghum*

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir