ریاضیات مهندسی

اعداد مختلط
بخش چهارم
آشنایی با توابع مختلط مقدماتی

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

تابع نمایی

هدف، تعریف تابع نمایی $w = f(z) = e^z$ به‌گونه‌ای است که دارای ۳ شرط زیر باشد:

۱- تابع e^z تک مقداره و تحلیلی باشد.

۲- مشتق تابع e^z مساوی خودش باشد.

۳- اگر $Im(z) = 0$ گردد، آنگاه e^z برابر e^x شود

$$f(z) = e^z = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$z = x + iy \rightarrow f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\, \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$$

تابع نمایی

نکته ۱: تابع نمایی $f(z) = e^z$ یک تابع تام است:

$$f'(z) = (e^z)' = e^z$$

نکته ۲: تابع نمایی $f(z) = e^z$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ است، زیرا:

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

نکته ۳: تابع نمایی $f(z) = e^z$ یک تابع یک به یک نیست زیرا به ازای $z = 0$ و $z = 2\pi i$ یک مقدار نتیجه می‌شود.

تابع نمایی

نکته ۴: معادله $e^z = 0$ جواب ندارد یا به‌عبارتی: $e^z \neq 0$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 0 & \rightarrow \cos y = 0 \\ e^x \sin y = 0 & \rightarrow \sin y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

چنین حالتی هرگز رخ نمی‌دهد

نکته ۵:

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{array}\right\} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تابع نمایی

نکته ۶:

$$|e^z| = mod(e^z) = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y}$$

$$= \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$$

$$\arg(e^z) = \measuredangle e^z = \tan^{-1}\frac{v}{u} = \tan^{-1}\frac{e^x \sin y}{e^x \cos y} = \tan^{-1}\tan y = y$$

تابع نمایی

نکته ۷:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$Im(z) = y = 0 \quad \rightarrow e^z = e^x$$

نکته ۸: بر خلاف تابع e^x حقیقی، تابع e^z می‌تواند سایر مقادیر مختلط را اختیار کند.

نکته ۹:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_1} \qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_1}$$

توابع مثلثاتی

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

توابع $\sin z$ و $\cos z$ توابعی تام هستند زیرا e^{iz} و e^{-iz} توابعی تام هستند.

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

توابع مثلثاتی

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

نکته: برای محاسبه بخش‌های حقیقی و موهومی توابع مثلثاتی کافیست در رابطه‌های e^{iz} و e^{-iz} مربوط به آن‌ها $z = x + iy$ قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$Re(\sin z) = \sin x \cosh y \qquad Re(\cos z) = \cos x \cosh y$$

$$Im(\sin z) = \cos x \sinh y \qquad Im(\cos z) = -\sin x \sinh y$$

توابع مثلثاتی

می‌خواهیم تابع $f(z) = \cos z$ را به فرم استاندارد $u + iv$ بنویسیم:

$$f(z) = \cos z = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos x\,(e^{-y} + e^{y}) - i\sin x\,(e^{y} - e^{-y})] = \cos x\left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right) - i\sin x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \cos x\cosh y \\ v(x,y) = -\sin x\sinh y \end{cases}$$

توابع مثلثاتی

به‌طور مشابه تابع $f(z) = \sin z$ را می‌توان به فرم استاندارد $u + iv$ نوشت:

$$f(z) = \sin z = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}[e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)]$$

$$= \frac{1}{2i}[\cos x\,(e^{-y} - e^{y}) - i\sin x\,(-e^{y} - e^{-y})]$$

$$= -i\cos x\frac{-(e^{y} - e^{-y})}{2} - \sin x\frac{-(e^{y} + e^{-y})}{2} \quad \Rightarrow \ \sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

توابع مثلثاتی

بررسی تحلیلی بودن $\sin z$ و $\cos z$

$$f(z) = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y \end{cases}$$ همه‌جا برابرند

$\Rightarrow$ $\cos z$ همه‌جا تحلیلی است

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y \\ \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \cos x \sinh y \end{cases}$$ همه‌جا برابرند

(به‌طور مشابه $\sin z$ نیز همه‌جا تحلیلی است)

توابع مثلثاتی

مشتق $\sin z$ و $\cos z$

$$f(z) = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\frac{d \cos z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y = -\sin z$$

به‌طور مشابه : $$\frac{d \sin z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cos z$$

نکته: مشتقات کلیه توابع مثلثاتی همانند توابع حقیقی محاسبه شده و دوره تناوب آن‌ها یکسان است.

توابع مثلثاتی

نکته: برای محاسبه صفرهای یک تابع مثلثاتی کافی است، بخش‌های حقیقی و موهومی آن را برابر با صفر قرار دهیم:

$f(z) = \cos z = 0 \to z = x + iy = (2k+1)\frac{\pi}{2} \to$ همان صفرهای تابع حقیقی $\cos x$ است.

نکته: صفرهای توابع $\sin z$ و $\cos z$ همان صفرهای توابع حقیقی $\sin x$ و $\cos x$ یعنی $z = k\pi$ و

$z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ برای کلیه kهای صحیح هستند.

نکته: تمام خواص مرسوم این توابع در دستگاه حقیقی برای دستگاه مختلط نیز برقرار است.

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

توابع مثلثاتی

مثال: حاصل عبارت $\cos(1+2i)$ را به‌دست آورید.

$$\cos(1+2i) = \cos 1 \cosh 2 - i \sin 1 \sinh 2 = 2.0327 - 3.0519i$$

مثال: ثابت کنید: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-i}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4}\right) + \left(\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

توابع مثلثاتی

مثال: معادله $\sin z = 3$ را حل کنید.

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 3 \Rightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = 3 \\ \cos x \sinh y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 3 \\ \cos x \sinh y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2} & (1) \\ \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ با جایگذاری در معادله بالا $\Rightarrow \sin\left[\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]\cosh y = 3 \Rightarrow \begin{cases} \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]\cosh y = 3 & (3) \\ -\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]\cosh y = 3 & (4) \end{cases}$

توابع مثلثاتی

(3) $\Rightarrow$ فقط با kهای زوج $\Rightarrow \cosh y = 3 \Rightarrow \boxed{y = \cosh^{-1} 3}$

(4) $\Rightarrow$ فقط با kهای فرد $\Rightarrow \cosh y = 3 \Rightarrow \boxed{y = \cosh^{-1} 3}$

(2) $\Rightarrow$ با جایگذاری در معادله بالا $\Rightarrow \sin x \underbrace{\cosh 0}_{1} = 3$ غیر قابل قبول

جواب نهایی $\Rightarrow z = x + iy$ که $x = \begin{cases} (2k+1)\frac{\pi}{2} & k = 0,2,4,\cdots \\ -(2k+1)\frac{\pi}{2} & k = 1,3,5,\cdots \end{cases}$ و $y = \cosh^{-1} 3$

توابع مثلثاتی

مثال: نشان دهید: $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \ \Rightarrow\ |\sin z|^2 = (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2$$

$$= \sin^2 x \cosh^2 y + \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \sinh^2 y \ = \sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y$$

$$= \sin^2 x \underbrace{(\cosh^2 y - \sinh^2 y)}_{1} + \sinh^2 y$$

$$= \sin^2 x + \sinh^2 y$$

توابع مثلثاتی

مثال: با استفاده از مثال قبل نشان دهید: $|\sinh y| \le |\sin z| \le |\cosh y|$

$\sqrt{a^2 + b^2} \ge \sqrt{a^2}$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \ge \sqrt{\sinh^2 y} \ = |\sinh y|$$

$$\Rightarrow |\sin z| \ge |\sinh y|$$

$\sqrt{a^2 - b^2} \le \sqrt{a^2}$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \cosh^2 y - 1} \ = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x} \ \le \sqrt{\cosh^2 y} = |\cosh y|$$

$$\Rightarrow |\sin z| \le |\cosh y|$$

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

سایر توابع هذلولوی و مشتقات آن‌ها همانند توابع متناظر حقیقی آن‌ها تعریف می‌شود

**** با استفاده از روابط نمایی بالا داریم:**

$\cosh iz = \cos z$ $\qquad$ $\sinh iz = i \sin z$

$\cos iz = \cosh z$ $\qquad$ $\sin iz = i \sinh z$

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

می‌خواهیم تابع $f(z) = \sinh z$ را به فرم استاندارد $u + iv$ بنویسیم:

$$f(z) = \sinh z = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-i}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x}(\cos y - i \sin y)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos y\,(e^x - e^{-x}) + i \sin y\,(e^x + e^{-x})] = \cos y\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + i \sin y\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y\ \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \sinh x \cos y \\ v(x,y) = \cosh x \sin y \end{cases}$$

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

به‌طور مشابه تابع $f(z) = \cosh z$ رامی‌توان به فرم استاندارد $u + iv$ نوشت:

$$f(z) = \cosh z = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{e^x e^{iy} + e^{-x}e^{-iy}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos y\,(e^x + e^{-x}) + i \sin y\,(e^x - e^{-x})] = \cos y\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + i \sin y\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x \ \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \cos y \cosh x \\ v(x,y) = \sin y \sinh x \end{cases}$$

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

بررسی تحلیلی بودن $\sinh z$ و $\cosh z$

$$f(z) = \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \cosh x \cos y \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \cosh x \cos y \end{cases}$$

همه‌جا برابرند

$\Rightarrow$ $\sinh z$ همه‌جا تحلیلی است

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\sinh x \sin y \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\sinh x \sin y \end{cases}$$

همه‌جا برابرند

(به‌طور مشابه $\cosh z$ نیز همه‌جا تحلیلی است)

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

مشتق $\sinh z$ و $\cosh z$

$$f(z) = \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\frac{d \sinh z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad = \cosh z$$

به‌طور مشابه : $f(z) = \cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$

$$\frac{d \cosh z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y = \sinh z$$

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

نکته: صفرهای توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ به ترتیب برابر با $k\pi i$ و $(2k+1)\frac{\pi}{2} i$ برای همه kهای صحیح هستند.

نکته: به‌طور کلی، همه روابط مثلثاتی برای توابع هذلولوی هم معتبر هستند به شرط آن‌که در این روابط به‌جای $\cos z$ و $\sin z$ به‌ترتیب توابع $\cosh z$ و $i \sinh z$ را جانشین کنیم.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \Rightarrow \ (i \sinh z)^2 + \cosh^2 z = -\sinh^2 z + \cosh^2 z \ = 1$$

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

مثال: معادله $\cosh z = -2$ را حل کنید.

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = -2 \Rightarrow \begin{cases} \cosh x \cos y = -2 \\ \sinh x \sin y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh x \cos y = -2 \\ \sinh x \sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sinh x = 0 \Rightarrow x = 0 & (1) \\ \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ با جایگذاری در معادله بالا $\Rightarrow \underbrace{\cosh(0)}_{1} \cos y = -2$ غیر قابل قبول

توابع هذلولوی (هایپربولیک)

مثال: معادله $\cosh z = -2$ را حل کنید.

(2) با جایگذاری در معادله بالا $\Rightarrow \cosh x \cos(k\pi) = -2$

- برای kهای زوج: $\cosh x = -2$ غیر قابل قبول
- برای kهای فرد: $\cosh x = 2 \Rightarrow x = \cosh^{-1} 2$

جواب نهایی $\Rightarrow z = x + iy \begin{cases} x = \cosh^{-1} 2 \\ y = k\pi \quad k = \pm 1, \pm 3, \cdots \end{cases}$

تابع لگاریتمی

$$w = \ln z \;\Rightarrow\; z = e^{w}$$

به‌دست آوردن فرم استاندارد

برای تعیین فرم استاندارد $\ln z$ بهتر است z را به فرم قطبی جایگزین کنیم، یعنی:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \Rightarrow w = \ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + \underbrace{\ln e^{i\theta}}_{i\theta \ln e}$$

$$\Rightarrow w = \ln z = \ln r + i\theta \Rightarrow w = \begin{cases} u(x,y) = \ln r = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ v(x,y) = \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

فرم استاندارد $\ln z$: $w = \ln z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

تابع لگاریتمی

بررسی تحلیلی بودن $\ln z$

$$f(z) = \ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

همه‌جا این برابری برقرار است به جز در مبدأ مختصات

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{x^2+y^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

همه‌جا این برابری برقرار است به جز در مبدأ مختصات

$\Rightarrow$ **$\ln z$ همه‌جا تحلیلی است به جز در مبدأ مختصات** $(z=0)$

تابع لگاریتمی

مشتق $\ln z$

$$f(z) = \ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{d \ln z}{dz} = (\ln z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

نکته: ملاحظه می‌گردد که در $z = 0$ تابع فاقد مشتق است

تابع لگاریتمی

شاخه اصلی لگاریتم

قبلاً دیدیم:

$$w = \ln z = \ln r + i\theta = \ln|z| + i \arg z$$

تابع بالا نسبت به تغییر آرگومان z حساس بوده و یک تابع چندمقداری است.

نکته : منظور از $\arg z$ در رابطه بالا $\theta + 2k\pi$ است، یعنی وقتی آرگومان عدد مختلط z را حساب کردیم باید آن را با $2k\pi$ نیز جمع کنیم.

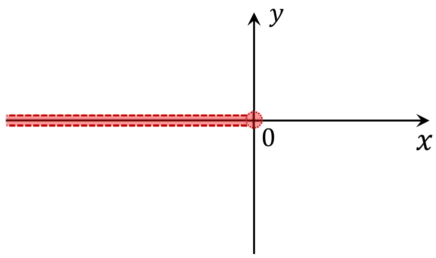
نکته : اگر در شکل قطبی z از آرگومان اصلی استفاده کنیم، تابع $\operatorname{Ln} z$ تعریف می‌شود که آن را شاخه اصلی تابع لگاریتم می‌نامند.

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \quad \Rightarrow \ln z = \operatorname{Ln} z + i2k\pi$$

تابع لگاریتمی

شاخه اصلی لگاریتم

نکته : تابع لگاریتم به‌جز نقاط روی نیم‌خط $Im(z) = 0$ و $Re(z) \leq 0$ در سایر نقاط پیوسته و تحلیلی است. این نیم‌خط را نیم‌خط برش تابع نامیده و دو سر خط برش، یعنی نقاط صفر و بینهایت را نقاط شاخه‌ای تابع می‌نامند.



نکته : در حقیقت تابع $\mathrm{Ln}\, z$ معکوس بخشی از تابع e^z برای $-\pi < \arg(e^z) = y \leq \pi$ است.

تابع لگاریتمی

نکته : در مورد به‌کارگیری قواعد لگاریتم حقیقی در تابع $\mathrm{Ln}\, z$ هوشیار باشید. مثلاً روابط زیر می‌توانند برای برخی اعداد مختلط برقرار نباشند:

$$\mathrm{Ln}\, z^n = n\, \mathrm{Ln}\, z$$

$$\mathrm{Ln}\, z_1 z_2 = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$$

در هر حال، روابط زیر همواره صحیح هستند:

$$\ln z^n = n \ln z$$

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2 \qquad \ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$$

تابع لگاریتمی

مثال : تابع $w = \ln z$ را به‌ازای عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ و $r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

اکنون اگر $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ باشد، آنگاه $\ln z^2$ برابر است با:

$$A = z^2 = \left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \rightarrow \ln A = \ln|A| + i\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = \left|e^{i\frac{3\pi}{2}}\right| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 1 \quad \Rightarrow \ln|A| = 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \qquad (-\pi < \theta < \pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \ln z^2 = -i\frac{\pi}{2}$$

تابع توانی

یکی از کاربردهای تابع $\ln z$ در محاسبه ${z_1}^{z_2}$ است:

$$if\ z_1 \neq 0 \quad \rightarrow w = {z_1}^{z_2} \quad \Rightarrow \ln w = \ln {z_1}^{z_2} = z_2 \ln z_1 = a + ib$$

در حالت کلی، ضرب دو عدد مختلط، یک عدد مختلط است.

$$\Rightarrow w = e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \sin b)$$

روش دوم:

$$if\ z_1 \neq 0 \quad \rightarrow w = {z_1}^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$$

تابع $\ln z$ یک تابع چندمقداری است پس در حالت کلی، تابع ${z_1}^{z_2}$ نیز چندمقداری است

$w = {z_1}^{z_2} = e^{z_2\, \mathrm{Ln}\, z_1} \quad \Rightarrow \quad {z_1}^{z_2}$ مقدار اصلی تابع

تابع توانی

نکته : چون تابع $w = {z_1}^{z_2}$ ترکیب دو تابع تحلیلی است، خود نیز یک تابع تحلیلی می‌گردد و بر اساس قاعده زنجیره‌ای مشتقگیری داریم:

$$({z_1}^{z_2})' = z_2\, {z_1}^{z_2 - 1}$$

نکته : به‌طور کلی اگر z_1 یک عدد مختلط غیرصفر باشد، آنگاه تابع $w = {z_1}^{z_2}$:

الف) برای z_2 صحیح و غیرصفر یک مقداری است.

ب) برای $z_2 = \frac{m}{n}$ گویا، n مقداری است و مقادیر آن روی یک دایره واقعند.

پ) برای z_2 اصم (گنگ)، دارای بی‌شمار مقدار است و مقادیر آن روی یک دایره واقعند.

ت) برای z_2 غیرحقیقی، دارای بی‌شمار مقدار است و مقادیر آن روی یک پیچ دوار واقعند.

تابع توانی

مثال : حاصل $w = (1+i)^{2-i}$ را بیابید.

$$w = (1+i)^{2-i} \Rightarrow \ln w = (2-i)\ln(1+i) = (2-i)\left[\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \underbrace{\left(2\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)}_{a} + i\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)}_{b} = e^{a}(\cos b + i\sin b)$$

$$= e^{\left(2\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\left[\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)}_{\text{رادیان}} + i\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)}_{\text{رادیان}}\right] = 1.49 + i\,4.126$$

تابع توانی

مثال : حاصل $w=(1+i)^{1-i}$ را بیابید.

$$w=(1+i)^{1-i} \quad = e^{(1-i)\ln(1+i)}$$

$$\ln(1+i)=\ln\sqrt{1+1}+i\arg(1+i) \;=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\; w=(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\left(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

تابع توانی

مثال : اگر z یک عدد مختلط باشد، اندازه و آرگومان عدد e^{z+i} را محاسبه کنید.

$$z=x+iy \;\rightarrow e^{z+i} = e^{x+i(y+1)} = e^{x}e^{i(y+1)}$$

$$\Rightarrow \left|e^{z+i}\right| = e^{x}$$

$$\Rightarrow \arg e^{z+i} = y+1$$

تابع توانی

مثال : حاصل $w = i^i$ را بیابید.

$$w = i^i \quad = e^{i\ln(i)} \quad = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i \pm 2k\pi i\right)} \quad = e^{\left(-\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)}$$

تابع ریشه

$$if\ a = \frac{1}{n} \quad \rightarrow w = z^a = z^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln z}$$

تابع بالا یک تابع چندمقداری است.

شاخه اصلی تابع بالا : $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z}$

این تابع نیز مانند تابع $\mathrm{Ln}\, z$ در کلیه نقاط به‌جز نقاط روی نیم‌خط نامثبت محور حقیقی پیوسته و تحلیلی است.

تابع ریشه

مثال : حاصل $w=\sqrt{i}$ را بیابید.

$$w=\sqrt{i}\ =e^{\frac{1}{2}\ln(i)}\ \ =e^{\frac{i}{2}\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\ \ =e^{i\left(k\pi\ \ \frac{\pi}{4}\right)}$$

معکوس توابع مثلثاتی و هذلولوی

این توابع بر حسب لگاریتم قابل تعریف هستند و می‌توان خواص آن‌ها را از روی تابع لگاریتم تعیین کرد.

همواره داریم:

$$\cosh^{-1}z=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\cos^{-1}z=-i\ln\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\sinh^{-1}z=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$$

$$\sin^{-1}z=-i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\tan^{-1}z=\frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

معکوس توابع مثلثاتی و هذلولوی

مثال : نشان دهید: $\cos^{-1} z = -i \ln\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$

$$w = \cos^{-1} z \;\Rightarrow z = \cos w = \frac{e^{-i} \quad + e^{iw}}{2}$$

$$(e^{iw} = s) \;\Rightarrow z = \frac{s + \frac{1}{s}}{2} \xrightarrow{\times s} z = \frac{s^2 + 1}{2s} \Rightarrow s^2 - 2zs + 1 = 0$$

$$\Rightarrow s = z \pm \sqrt{z^2 - 1} = e^{iw} \xrightarrow{\ln} iw = \ln\left[z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right]$$

$$\Rightarrow w = \cos^{-1} z = -i \ln\left[z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right]$$

معکوس توابع مثلثاتی و هذلولوی

مثال : نشان دهید: $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

$$w = \tanh^{-1} z \Rightarrow z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$(e^{w} = s) \;\Rightarrow z = \frac{s - \frac{1}{s}}{s + \frac{1}{s}} \xrightarrow{\times s} z = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} \Rightarrow zs^2 + z = s^2 - 1$$

$$\Rightarrow 1 + z = s^2(1 - z)$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1+z}{1-z} = e^{2w} \xrightarrow{\ln} 2w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow w = \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

معکوس توابع مثلثاتی و هذلولوی

مثال : ثابت کنید:

$$\frac{d}{dz}(\cos^{-1} z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$w = \cos^{-1} z \quad \Rightarrow z = \cos w \quad \Rightarrow \frac{dz}{dw} = -\sin w \quad = -\sqrt{1-\cos^2 w} \quad = -\sqrt{1-z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

There was a Door to which I found no Key
There was a Veil past which I could not see

Some little Talk awhile of ME and THEE
There seemed – and then no more of THEE and ME

Ommar Khayam
The Sage

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir