ریاضیات مهندسی

اعداد مختلط

بخش پنجم

انتگرال‌گیری در صفحه مختلط

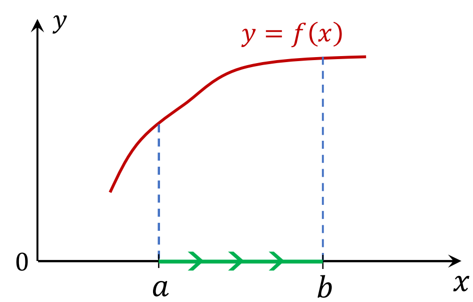
محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

مقدمه

یادآوری: انتگرال حقیقی

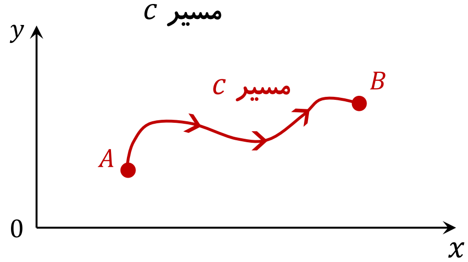
$$\int_a^b f(x)dx$$



در این حالت، رسیدن از a به b تنها و تنها روی یک مسیر انجام می‌شود.

توابع مختلط

$$\underset{\text{مسیر } c}{\int_A^B} f(z)dz$$



اولاً در حالت مختلط، مسیرهایی که A به B وصل می‌کنندمتعدد است و چون در حالت کلی، مسیرهای مختلف، جوابهای مختلفی هم به‌دست می‌دهد پس باید حتماً مسیر را مشخص کرد.

ثانیاً انتگرال‌گیری روی مسیر بسته در حالت مختلط قابل تعریف است ولی در حالت حقیقی تعریف نمی‌گردد.

انتگرال‌گیری بین دو نقطه

$$\underset{c\ \text{مسیر}}{\int_A^B} f(z)dz$$

۱- ابتدا $f(z)$ و dz را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم، یعنی:

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

$$dz = dx + i\, dy$$

۲- $f(z)$ و dz را در انتگرال قرار داده و حاصل را به دو انتگرال، یکی بر حسب dx و دیگری بر حسب dy در می‌آوریم:

$$\underset{c\ \text{مسیر}}{\int_A^B} f(z)dz = \int_{x_A}^{x_B} (u+iv)dx + i\int_{y_A}^{y_B} (u+iv)dy$$

۳- حال در انتگرال اول باید به‌جای y بر حسب x و در انتگرال دوم به‌جای x بر حسب y جایگزین کرد (ارتباط مناسب بین x و y را مسیر c مشخص می‌کند). همچنین در انتگرال اول حدود انتگرال باید از x_A تا x_B و در انتگرال دوم از y_A تا y_B باشد.

انتگرال‌گیری بین دو نقطه

مثال: حاصل انتگرال زیر را روی مسیرهای زیر حساب کنید:

$$I = \int_0^{3+i} z^2 dz$$

الف) در مسیر خط $y = \frac{x}{3}$

ب) روی محور حقیقی تا نقطه 3 سپس تا نقطه $3+i$

پ) روی محور عمودی تا نقطه i سپس به‌طور افقی تا نقطه $3+i$

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i\, 2xy \qquad dz = dx + i\, dy$$

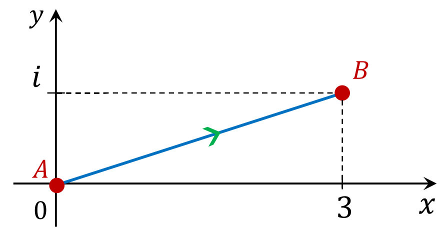
$$I = \int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{x_A}^{x_B} [(x^2-y^2) + i\, 2xy]dx + i\int_{y_A}^{y_B} [(x^2-y^2) + i\, 2xy]dy$$

انتگرال‌گیری بین دو نقطه

الف) در مسیر خط $y = \frac{x}{3}$

$$I = \int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{x_A}^{x_B} [(x^2 - y^2) + i\,2xy]dx + i\int_{y_A}^{y_B} [(x^2 - y^2) + i\,2xy]dy$$

$$I = \underbrace{\int_0^3 \left[\left(x^2 - \frac{x^2}{9}\right) + i\,\frac{2}{3}x^2\right]}_{\left(\frac{8}{9} + i\frac{2}{3}\right)x^2} dx + i\int_0^1 \underbrace{[(9y^2 - y^2) + i\,6y^2]}_{(8+6i)y^2}dy$$



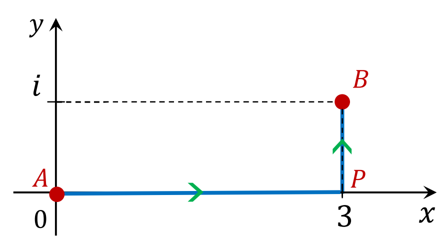
$$= \left(\frac{8}{9} + i\frac{2}{3}\right)\underbrace{\int_0^3 x^2 dx}_{9} + i(8+6i)\underbrace{\int_0^1 y^2 dy}_{1/3} = (8+i6) + \left(\frac{8i}{3} - 2\right) = 6 + i\frac{26}{3}$$

انتگرال‌گیری بین دو نقطه

ب) روی محور حقیقی تا نقطه 3 سپس تا نقطه $3+i$

$$I = \int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{x_A}^{x_B} [(x^2 - y^2) + i\,2xy]dx + i\int_{y_A}^{y_B} [(x^2 - y^2) + i\,2xy]dy$$

$$I = \underbrace{\int_A^B}_{y=0\,,\,dy=0} f(z)dz = \underbrace{\int_A^P f(z)dz}_{I_1} + \underbrace{\int_P^B f(z)dz}_{I_2}$$



$$I_1 = \int_A^P z^2 dz = \int_0^3 x^2 dx = 9$$

$$I_2 = \underbrace{\int_P^B}_{x=3\,,\,dx=0} z^2 dz = i\int_0^1 [(9 - y^2) + i\,6y]dy = i\left[9y - \frac{1}{3}y^3 + i3y^2\right]_0^1$$

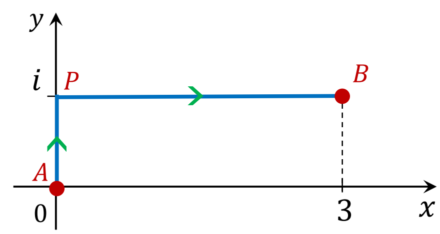
$$= i\left[9 - \frac{1}{3} + i3\right] = i\left[\frac{26}{3} + i3\right] = -3 + i\frac{26}{3} \rightarrow I = I_1 + I_2 = 6 + i\frac{26}{3}$$

انتگرال‌گیری بین دو نقطه

پ) روی محور عمودی تا نقطه i سپس به‌طور افقی تا نقطه $3+i$

$$I = \int_0^{3+i} z^2 dz \;=\; \int_{x_A}^{x_B} [(x^2 - y^2) + i\, 2xy]dx + i\int_{y_A}^{y_B} [(x^2 - y^2) + i\, 2xy]dy$$

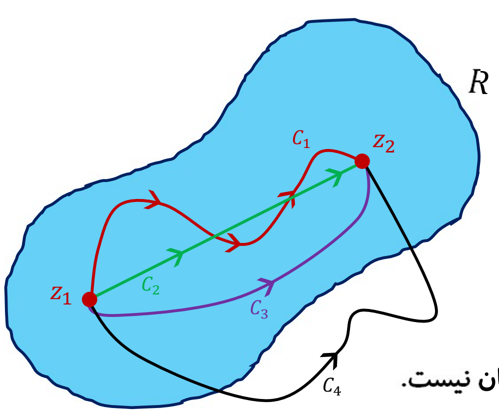
$$I = \int_A^B f(z)dz = \underbrace{\int_A^P f(z)dz}_{I_1} + \underbrace{\int_P^B f(z)dz}_{I_2}$$



$$I = I_1 + I_2 = 6 + i\frac{26}{3}$$

قضایایی انتگرال‌گیری بین دو نقطه

۱- فرض کنید تابع $f(z)$ در تمام نقاط درون ناحیه R تحلیلی باشد و z_1 و z_2 دو نقطه از این ناحیه باشند، آنگاه $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ مستقل از مسیری است که دو نقطه را به هم وصل می‌کند (مشروط بر آنکه تمام مسیر در ناحیه R باشد)



در این حالت، انتگرال روی مسیر C_4 با دیگر مسیرها یکسان نیست.

قضایایی انتگرال‌گیری بین دو نقطه

۲- فرض کنید تابع $f(z)$ در تمام نقاط درون ناحیه R تحلیلی باشد و z_0 و z دو نقطه از این ناحیه همبند باشند، آنگاه $\mathrm{g}(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ نیز در ناحیه R تحلیلی است و داریم:

$$g'(z) = f(z)$$

۳- فرض کنید تابع $f(z)$ در تمام نقاط درون ناحیه R تحلیلی باشد و z_1 و z_2 دو نقطه از این ناحیه باشند، آنگاه داریم:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = g(z_2) - g(z_1)$$

که $\mathrm{g}(z)$ هر تابع اولیه $f(z)$ است.

قضایایی انتگرال‌گیری بین دو نقطه

مثال: حاصل انتگرال زیر را حساب کنید:

(الف) $$I = \int_0^{3+i} z^2 dz = \frac{1}{3}z^3\Big)_0^{3+i} = \frac{1}{3}(3+i)^3 = \frac{1}{3}[27 + i27 - 9 - i] = 6 + i\frac{26}{3}$$

(ب) $$I = \int_0^{1+i\pi} \cosh 2z\, dz = \frac{1}{2}\sinh 2z\Big)_0^{1+i\pi} = \frac{1}{2}\sinh(2 + i2\pi)$$

$$= \frac{1}{2}[\sinh 2 \cos 2\pi + i \cosh 2 \sin 2\pi] = \frac{1}{2}\sinh 2$$

انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

$$\oint_C f(z)dz \quad \text{یا} \quad \int_C f(z)dz$$

قضیه کوشی: اگر $f(z)$ در تمام نقاط درون و روی منحنی بسته C تحلیلی باشد، آنگاه:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

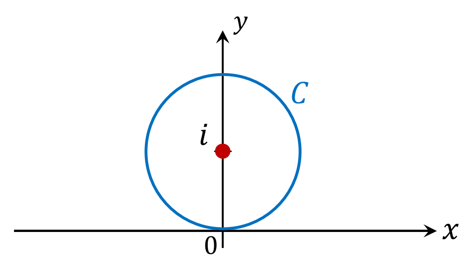
انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

مثال: اگر C دایره‌ای به مرکز i و شعاع واحد باشد، مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

$C: |z-i| = 1$

(الف) $\oint_C z^2 dz = 0$

(ب) $\oint_C e^{2z} dz = 0$



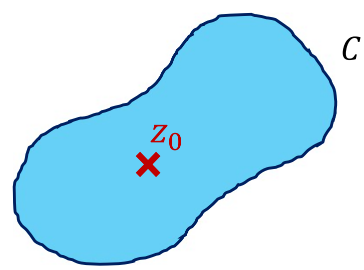
توجه: عکس قضیه کوشی لزوماً درست نیست یعنی ممکن است $\oint_C f(z)dz = 0$ گردد ولی $f(z)$ درون منحنی بسته C دارای نقاط منفرد هم باشد.

انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

قضیه انتگرال کوشی:

اگر $f(z)$ در تمام نقاط درون و روی منحنی بسته C تحلیلی بوده و z_0 نقطه‌ای غیرتحلیلی از درون C باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

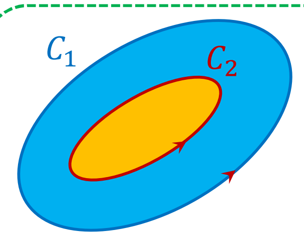


انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

نتیجه قضیه انتگرال کوشی:

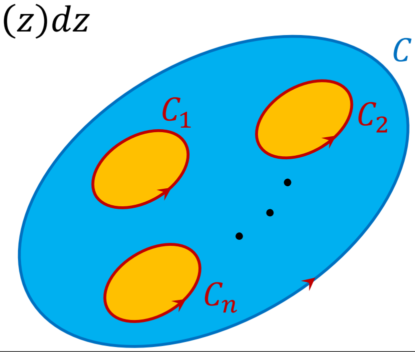
اگر $f(z)$ داخل و روی مرز ناحیه R، ناحیه بین منحنی‌های بسته ساده متقاطع C_1، C_2 ، $\cdots$ ، C_1 و C سوی‌دار در جهت مثبت تحلیلی باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz$$



$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

اصل تغییر شکل کانتورها



انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

قضیه انتگرال کوشی

مثال: حاصل انتگرال زیر را در حالتهای زیر به‌دست آورید:

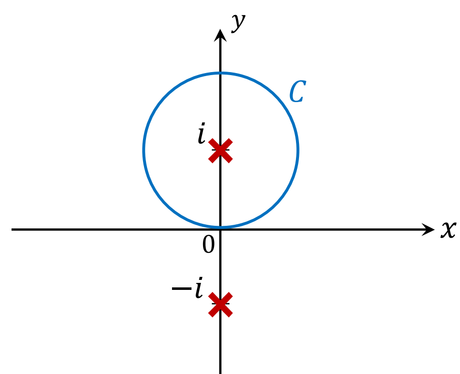
$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz$$

(الف) C دایره $|z-i|=1$ باشد.　　(ب) C دایره $|z+i|=1$ باشد.

$$\frac{e^z}{z^2+1}=\frac{e^z}{(z-i)(z+i)} \Rightarrow \text{نقاط غیرتحلیلی:} \begin{cases} z=i \\ z=-i \end{cases}$$

انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

(الف) C دایره $|z-i|=1$ باشد.



$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^z}{(z-i)(z+i)}dz$$

$$= \oint_C \frac{\left(\frac{e^z}{z+i}\right)}{(z-i)}dz = 2\pi i f(i)$$

$f(z)$

$$= 2\pi i\frac{e^i}{2i} = \pi e^i = \pi(\cos 1 + i\sin 1)$$

انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

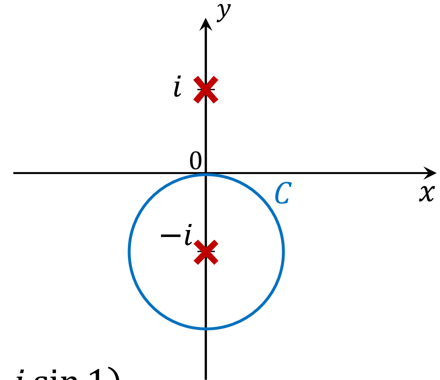
(ب) C دایره $|z+i|=1$ باشد.

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^z}{(z-i)(z+i)}dz$$

$$= \oint_C \frac{\left(\frac{e^z}{z-i}\right)}{(z+i)}dz = 2\pi i f(-i)$$

$f(z)$

$$= 2\pi i \frac{e^{-i}}{-2i} = -\pi e^{-i} = -\pi(\cos 1 - i\sin 1)$$



انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

مثال: حاصل انتگرال زیر را در حالتهای زیر به‌دست آورید:

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)}dz$$

(الف) C دایره $|z|=1$ باشد.

(ب) C دایره $|z-2|=1$ باشد.

(پ) C دایره $|z|=3$ باشد.

$$\frac{e^z}{z(z-2)} \Rightarrow \text{نقاط منفرد:} \begin{cases} z=0 \\ z=2 \end{cases}$$

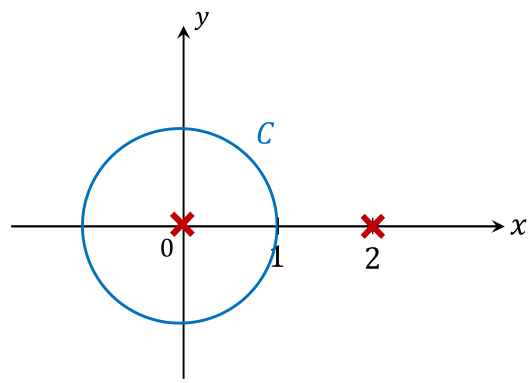
انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

(الف) C دایره $|z| = 1$ باشد.

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)}dz = \oint_{C:|z|=1} \frac{e^z}{z(z-2)}dz$$

$$= \oint_C \frac{\overbrace{\left(\frac{e^z}{z-2}\right)}^{f(z)}}{z}dz = 2\pi i f(0)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{-2} = -\pi i$$



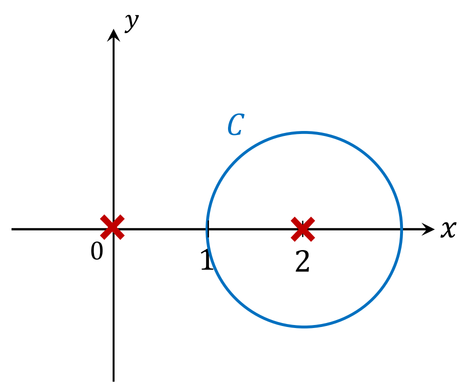
انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

(ب) C دایره $|z-2| = 1$ باشد.

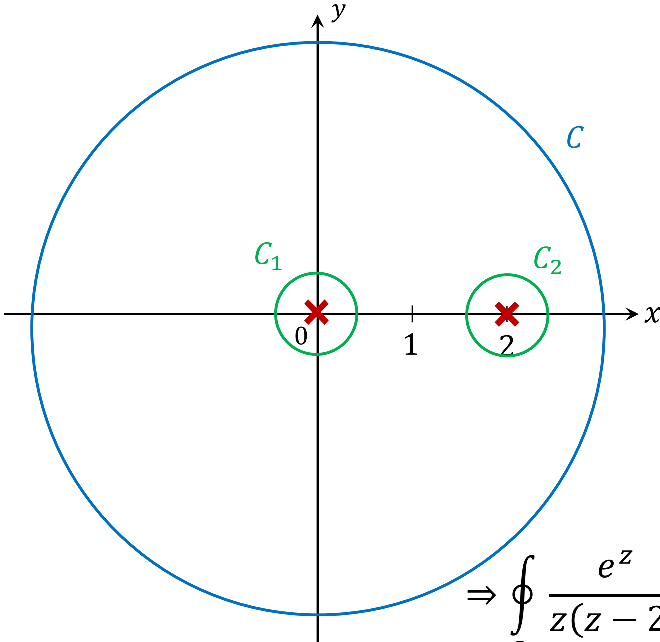
$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)}dz = \oint_{C:|z-2|=1} \frac{e^z}{z(z-2)}dz$$

$$= \oint_C \frac{\overbrace{\left(\frac{e^z}{z}\right)}^{f(z)}}{(z-2)}dz = 2\pi i f(2)$$

$$= 2\pi i \frac{e^2}{2} = \pi i e^2$$



(پ) C دایره $|z| = 3$ باشد.



$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)} dz = \oint_{C:|z|=3} \frac{e^z}{z(z-2)} dz$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{e^z}{z(z-2)} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z-2)} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z-2)} dz$$

$$= -\pi i + \pi i e^2$$

انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

تعمیم قضیه انتگرال کوشی:

اگر $f(z)$ در تمام نقاط درون و روی منحنی بسته C تحلیلی بوده و z_0 نقطه‌ای غیر تحلیلی از درون C باشد، آنگاه داریم:

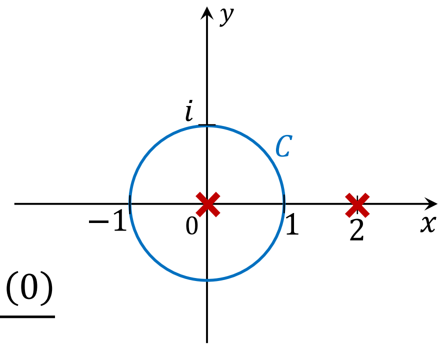
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i \ f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

تعمیم قضیه انتگرال کوشی:

مثال: حاصل انتگرال زیر را روی مسیرهای زیر به‌دست آورید:

$$\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz$$



(الف) $C:\ |z|=1$

$$\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz = \oint_C \frac{\overbrace{\left(\frac{z+1}{z-2}\right)}^{f(z)}}{z^2}dz = \frac{2\pi i\ f'(0)}{1!}$$

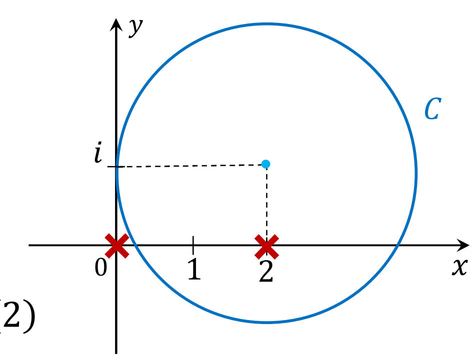
$$= 2\pi i\left(-\frac{3}{4}\right) = -i\frac{3\pi}{2}$$

انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

تعمیم قضیه انتگرال کوشی:

مثال: حاصل انتگرال زیر را روی مسیرهای زیر به‌دست آورید:

$$\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz$$



(ب) $C:\ |z-2-i|=2$

$$\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz = \oint_C \frac{\overbrace{\left(\frac{z+1}{z^2}\right)}^{f(z)}}{z-2}dz = 2\pi i\ f(2)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3}{4}\right) = i\frac{3\pi}{2}$$

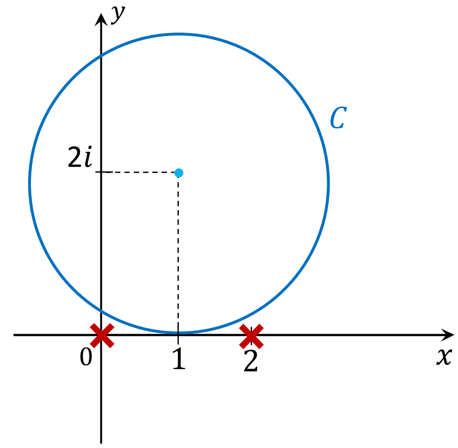
انتگرال‌گیری روی مسیر بسته

تعمیم قضیه انتگرال کوشی:

مثال: حاصل انتگرال زیر را روی مسیرهای زیر به‌دست آورید:

$$\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz$$

(پ) $C: \ |z-1-2i| = 2$



$$\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)}dz = 0$$

There was a Door to which I found no Key
There was a Veil past which I could not see

Some little Talk awhile of ME and THEE
There seemed – and then no more of THEE and ME

Ommar Khayam
The Sage

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir