ریاضیات مهندسی

اعداد مختلط
بخش ششم
سری‌های مختلط

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

مقدمه

تعریف

یک مجموع از بینهایت جمله مختلط را یک سری مختلط گویند.

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

برای بیان مفهوم همگرایی یا واگرایی سری داریم:

اولین جمع جزئی: $S_1(z) = f_1(z)$

دومین جمع جزئی: $S_2(z) = f_1(z) + f_2(z)$

$\vdots$

nاُمین جمع جزئی: $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$

مقدمه

$$if \lim_{n\to\infty} S_n(z) \begin{cases} \text{برابر با عدد محدود و معین } S_0 \text{ شود گوییم سری همگراست و جمع آن } S_0 \text{ است.} \\ \text{اگر حاصل عددی محدود یا معین نباشد، سری واگراست.} \end{cases}$$

تعریف همگرایی مطلق

سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ را **مطلقاً همگرا** گویند، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ همگرا باشد، در غیر این‌صورت یعنی اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ همگرا ولی $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ واگرا باشد سری را **همگرای مشروط** گویند.

قضیه: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ همگرا باشد، قطعاً سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ نیز همگراست ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

آزمون‌های همگرایی

آزمون نسبت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| \begin{cases} <1 & \text{سری همگرای مطلق است.} \\ >1 & \text{سری واگراست.} \\ =1 & \text{آزمون نسبت پاسخگو نیست.} \end{cases}$$

آزمون ریشه

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|} \begin{cases} <1 & \text{سری همگرای مطلق است.} \\ >1 & \text{سری واگراست.} \\ =1 & \text{آزمون ریشه پاسخگو نیست.} \end{cases}$$

سری هندسی

اگر هر جمله سری با ضرب جمله قبل در عدد معینی موسوم به قدر نسبت به‌دست آید، سری حاصل را سری هندسی گویند.

$$f_0 + rf_0 + r^2 f_0 + r^3 f_0 + \cdots$$

قضیه:

برای سری هندسی بالا اگر $|r| < 1$ باشد، سری همگراست و مجموع آن برابر با $\frac{f_0}{1-r}$ است و اگر $|r| \geq 1$ باشد، سری واگراست.

سری هندسی

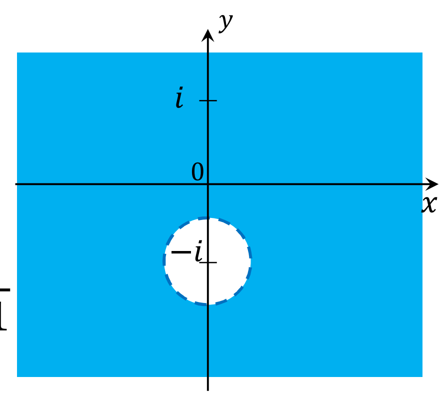
مثال: **ناحیه همگرایی و مجموع سری به‌دست آورید.**

$$\frac{1}{2(z+i)} + \frac{1}{2^2(z+i)^2} + \frac{1}{2^3(z+i)^3} + \cdots$$

$$r = \frac{1}{2(z+i)} \Rightarrow \left|\frac{1}{2(z+i)}\right| < 1 \Rightarrow |(z+i)| > \frac{1}{2}$$

نقاط بیرون دایره‌ای به مرکز $-i$ و شعاع $\frac{1}{2}$

$$\text{مجموع سری} = \frac{f_0}{1-r} = \frac{\frac{1}{2(z+i)}}{1 - \frac{1}{2(z+i)}} = \frac{1}{2(z+i) - 1}$$



سری هندسی

مثال: ناحیه همگرایی و مجموع سری به‌دست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(z^2+1)} = e^{-(z^2+1)} + e^{-2(z^2+1)} + e^{-3(z^2+1)} + \cdots$$

$$r = e^{-(z^2+1)} \Rightarrow |r| < 1 \Rightarrow \left|e^{-(z^2+1)}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \left|e^{-(x^2-y^2+1+i2xy)}\right| < 1 \Rightarrow \underbrace{\left|e^{-(x^2-y^2+1)}\right|}_{>0}\overbrace{\left|e^{-i2xy}\right|}^{=1} < 1 \Rightarrow e^{-(x^2-y^2+1)} < 1$$

$$\Rightarrow -x^2 + y^2 - 1 < 0 \Rightarrow y^2 - x^2 < 1$$

مجموع سری $= \dfrac{f_0}{1-r} = \dfrac{e^{-(z^2+1)}}{1-e^{-(z^2+1)}} = \dfrac{1}{e^{(z^2+1)}-1}$

سری هندسی

مثال: ناحیه همگرایی سری به‌دست آورید.

$$1 + \frac{1}{2^2}\frac{z+1}{z-1} + \frac{1}{3^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \frac{1}{4^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \cdots$$

جمله عمومی سری: $f_n(z) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{n-1}$

آزمون نسبت: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n}{\frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n-1}}\right| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| < 1$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x+1)+iy}{(x-1)+iy}\right| < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} < 1 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 < (x-1)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 2x < -2x \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow x < 0$$

سری هندسی

ناحیه همگرایی سری: $x < 0 \Rightarrow$ سمت چپ محور موهومی

حال باید همگرایی یا واگرایی سری را روی محور yها یعنی نقاطی که در آن $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$ است و آزمون نسبت پاسخگوی آن نیست بررسی کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = 1 + \frac{1}{2^2}\underbrace{\left|\frac{z+1}{z-1}\right|}_{1} + \frac{1}{3^2}\underbrace{\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2}_{1} + \frac{1}{4^2}\underbrace{\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^3}_{1} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ همگراست $\Rightarrow$ پس خود $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ نیز همگرا می‌گردد پس کل ناحیه همگرایی $x \le 0$ است.

سری توانی

یک سری را که بر حسب توانهای غیرمنفی $(z - z_0)$ باشد، سری توانی گویند.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 (z - z_0)^0 + a_1 (z - z_0)^1 + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

z_0 یک عدد مختلط، n یک عدد طبیعی و a_n یک دنباله مختلط است.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|$$

- $if\ \rho = 0 \Rightarrow$ سری برای همه zها همگرای مطلق است.
- $if\ 0 < \rho < \infty$
  - سری همگرا $\forall z\ ;\ |z - z_0| < \frac{1}{\rho}$
  - سری واگرا $\forall z\ ;\ |z - z_0| > \frac{1}{\rho}$
- $if\ \rho = \infty \Rightarrow$ سری فقط در نقطه z_0 همگراست.

$r = \frac{1}{\rho}$ را شعاع همگرایی، دایره $|z - z_0| = r$ را دایره همگرایی و قرص $|z - z_0| < r$ را قرص همگرایی سری می‌نامیم.

سری تیلور

سری تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه منظم $z = z_0$ برابر است با:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!}$$

در حالت خاص اگر سری تیلور را حول $z = 0$ بنویسیم سری حاصل را مک‌لورن گویند.

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)z}{1!} + \frac{f''(0)\,z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$$

سری تیلور

مثال: بسط تیلور تابع $f(z) = \cos z$ را حول نقطه $z = 0$ به‌دست آورید.

$f(0) = \cos 0 = 1$ $\qquad f''(0) = -\cos 0 = -1$ $\qquad f^{(4)}(0) = 1$

$f'(0) = -\sin 0 = 0$ $\qquad f^{(3)}(0) = 0$

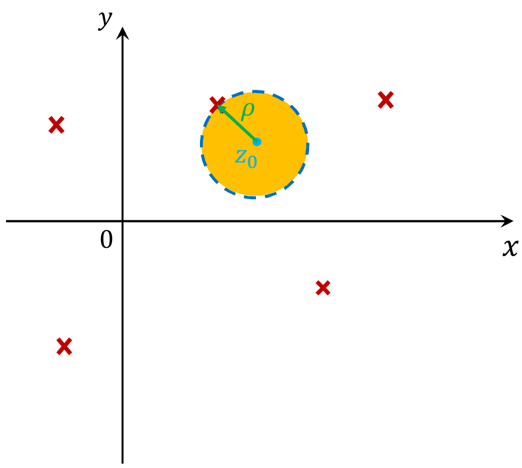
بسط مک‌لورن: $$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)z}{1!} + \frac{f''(0)\,z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$$

بسط مک‌لورن: $$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots$$

تعیین ناحیه همگرایی سری تیلور بدون نوشتن بسط

فرض کنید می‌خواهیم ناحیه همگرایی سری تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه $z = z_0$ را به‌دست آوریم،

برای این منظور، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



۱– نقاط منفرد تابع $f(z)$ را مشخص می‌کنیم.

۲– فاصله z_0 را تا نزدیکترین نقطه منفرد به‌دست آورده و آن را شعاع همگرایی (ρ) می‌گوییم.

۳– ناحیه همگرایی خواهد شد: $|z - z_0| < \rho$

تعیین ناحیه همگرایی سری تیلور بدون نوشتن بسط

مثال: بدون نوشتن سری، ناحیه همگرایی سری تیلور تابع $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ حول نقطه $z_0 = 4i$ را به‌دست آورید.

۱– تعیین نقاط منفرد: $e^z - 1 = 0 \ \Rightarrow e^z = 1 \ \Rightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ \underbrace{e^x}_{\neq 0} \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \ \Rightarrow y = n\pi \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله اول}} e^x \cos n\pi = 1 \end{cases}$$

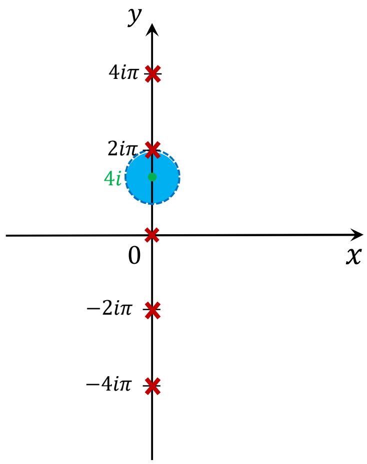
$$e^x \cos n\pi = 1 \begin{cases} n \ \text{زوج} \ \to e^x = 1 \ \to x = 0 \\ n \ \text{فرد} \ \to e^x = -1 \quad (\text{غیر قابل قبول}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ نقاط منفرد: $z = x + iy = in\pi$

$n = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots$

تعیین ناحیه همگرایی سری تیلور بدون نوشتن بسط

مثال: بدون نوشتن سری، ناحیه همگرایی سری تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$ حول نقطه $z_0=4i$ را به‌دست آورید.



۲- تعیین شعاع همگرایی

$$\rho = 2\pi - 4 = 2.28$$

۳- تعیین ناحیه همگرایی

$$|z-4i| < 2.28$$

بیان سری تیلور برای کسرهای گویا

اگر تابع $f(z)$ به‌صورت یک کسر گویا (نسبت دو چندجمله‌ای) باشد، آنگاه می‌توان با استفاده از قضیه زیر، سری تیلور آن را بدون استفاده مستقیم از فرمول نوشت:

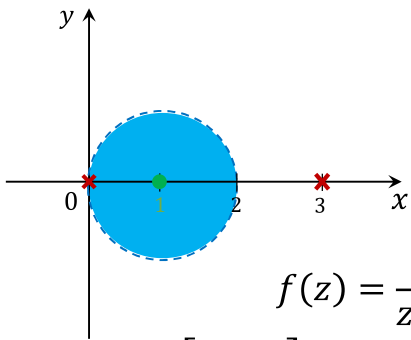
قضیه دو جمله‌ای: اگر s و t دو عدد مختلط و n عددی حقیقی باشد، آنگاه داریم:

$$(s+t)^n = s^n + ns^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{2!}s^{n-2}t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s^{n-k}t^k$$

اگر n عددی منفی باشد، لزوماً باید $|s|>|t|$ باشد.

بیان سری تیلور برای کسرهای گویا

مثال: بدون استفاده مستقیم از فرمول، بسط تیلور تابع $f(z)=\frac{3}{z(3-z)}$ حول نقطه $z_0=1$ را به‌دست آورید.



۱- ابتدا ناحیه همگرایی سری را مشخص می‌کنیم.

$$\rho=1 \quad \Rightarrow |z-1|<1$$

۲- تابع $f(z)$ را به‌صورت کسرهای جزئی در می‌آوریم:

$$f(z)=\frac{3}{z(3-z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{3-z}$$

$$A=\Big[f(z)z\Big]_{z=0}=1 \qquad B=\Big[f(z)(3-z)\Big]_{z=3}=1$$

بیان سری تیلور برای کسرهای گویا

۳- هر کدام از جملات کسر جزئی را به شکل توانهایی از $(z-1)$ در می‌آوریم یعنی داریم:

$$f(z)=\frac{3}{z(3-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3-z}$$

$$\frac{1}{z}=(z)^{-1}=[\underbrace{(z-1)+1}_{|s|<|t|}]^{-1}=[\underbrace{1}_{s}+\underbrace{(z-1)}_{t}]^{-1}$$

$$=(1)^{-1}+(-1)(1)^{-2}(z-1)+\frac{(-1)(-2)}{2!}(1)^{-3}(z-1)^2-\cdots$$

$$=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+(z-1)^4-\cdots$$

بیان سری تیلور برای کسرهای گویا

$$\frac{1}{3-z} = (3-z)^{-1} = [\underbrace{2}_{s} \underbrace{-(z-1)}_{t}]^{-1}$$

$$= (2)^{-1} + (-1)(2)^{-2}[-(z-1)] + \frac{(-1)(-2)}{2!}(2)^{-3}[-(z-1)]^2 - \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z-1) + \frac{1}{8}(z-1)^2 + \frac{1}{16}(z-1)^3 + \frac{1}{32}(z-1)^4 + \cdots$$

$$f(z) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}(z-1) + \frac{9}{8}(z-1)^2 + \cdots$$

بیان سری تیلور برای کسرهای گویا

مثال: در مثال قبل، بدون محاسبه مستقیم مشتق، $f''(1)$ را بیابید .

$$f(z) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}(z-1) + \frac{9}{8}(z-1)^2 + \cdots$$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)(z-z_0)^n}{n!}$$

$$\frac{f''(1)}{2!} = \frac{9}{8} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = \frac{9}{4}$$

سری تیلور (مک‌لورن) توابع مقدماتی

$$\left.\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \end{aligned}\right\}$$

این دو تابع فاقد نقطه منفرد هستند پس شعاع همگرایی هر دو بسط برابر با بینهایت است ($r = \infty$).

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \qquad r = \infty$$ (با مشتقگیری از $\sin z$)

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \qquad r = \infty$$ (با مشتقگیری از $\sin iz = i \sinh z$)

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad r = \infty$$ (با مشتقگیری از $\sinh z$)

سری تیلور (مک‌لورن) توابع مقدماتی

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad r = \frac{\pi}{2}$$ (با تقسیم صورت بر مخرج)

$$\tanh z = z - \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad r = \frac{\pi}{2}$$ (با تقسیم صورت بر مخرج)

$$(1+z)^P = 1 + Pz + \frac{P(P-1)}{2} z^2 + \cdots$$ P عدد صحیح منفی (استفاده از بسط خیام ـ پاسکال)

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \qquad r = 1$$

سری لوران (لورنت)

بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه منفرد $z = z_0$ یک سری توانی با فرم کلی زیر است:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

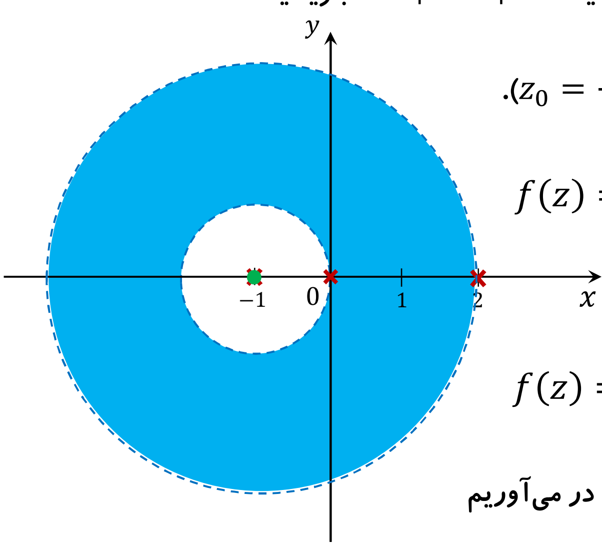
تذکر: در بسط لوران حول نقاط منفرد، حتماً باید یک جمله با توان منفی ظاهر شود.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint (z - z_0)^{n-1} f(z) dz$$

سری لوران (لورنت)

مثال: بسط لوران تابع $f(z) = \frac{7z-2}{(z+1)z(z-2)}$ را در ناحیه $1 < |z + 1| < 3$ بنویسید.



تذکر: مرکز دوایر را همان نقطه بسط می‌گیریم ($z_0 = -1$).

$$f(z) = \frac{7z - 2}{(z + 1)z(z - 2)} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z - 2}$$

$$f(z) = \frac{7z - 2}{(z + 1)z(z - 2)} = \frac{-3}{z + 1} + \frac{1}{z} + \frac{2}{z - 2}$$

حال هر کدام از جملات بالا را به شکل توان‌های $(z + 1)$ در می‌آوریم

سری لوران (لورنت)

$$\frac{-3}{z+1} = -3(z+1)^{-1}$$

$$\frac{1}{z} = (z)^{-1} = [\underbrace{(z+1)}_{s}\underbrace{-1}_{t}]^{-1}$$

$$= (z+1)^{-1} + (-1)(z+1)^{-2}(-1) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(z+1)^{-3}(-1)^2 + \cdots$$

$$= (z+1)^{-1} + (z+1)^{-2} + (z+1)^{-3} + (z+1)^{-4} + \cdots$$

سری لوران (لورنت)

$$\frac{2}{z-2} = 2(z-2)^{-1} = 2[\underbrace{(z+1)}_{s}\underbrace{-3}_{t}]^{-1} = 2[\underbrace{-3}_{s}+\underbrace{(z+1)}_{t}]^{-1}$$

$$= 2\left[(-3)^{-1} + (-1)(-3)^{-2}(z+1) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-3)^{-3}(z+1)^2 + \cdots\right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(z+1) - \frac{1}{27}(z+1)^2 - \frac{1}{81}(z+1)^3 - \cdots\right]$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{2}{9}(z+1) - \frac{2}{27}(z+1)^2 - \frac{2}{81}(z+1)^3 - \cdots$$

سری لوران (لورنت)

جمع نظیر به نظیر:

$$f(z) = \cdots + (z+1)^{-4} + (z+1)^{-3} + (z+1)^{-2} - 2\,(z+1)^{-1} - \frac{2}{3}$$
$$-\frac{2}{9}(z+1) - \frac{2}{27}(z+1)^2 - \cdots$$

سری لوران (لورنت)

مثال: مسأله قبل را برای ناحیه $|z+1| < 1$ بنویسید.

با توجه به ناحیه بالا، تنها باید بسط $\frac{1}{z}$ را عوض کرد.

$$\frac{1}{z} = (z)^{-1} = [\underbrace{(z+1)}_{s}\underbrace{-1}_{t}]^{-1} = [\underbrace{(-1)}_{s} + \underbrace{(z+1)}_{t}]^{-1}$$
$$= -1 - (z+1) - (z+1)^2 - (z+1)^3 - \cdots$$

حال سری لوران خواهد شد:

$$f(z) = -3(z+1)^{-1} - \frac{5}{3} - \frac{11}{9}(z+1) - \cdots$$

سری لوران (لورنت)

مثال: مسأله قبل را برای ناحیه $|z+1|>3$ بنویسید.

با توجه به ناحیه بالا، تنها باید بسط $\frac{2}{z-2}$ را عوض کرد.

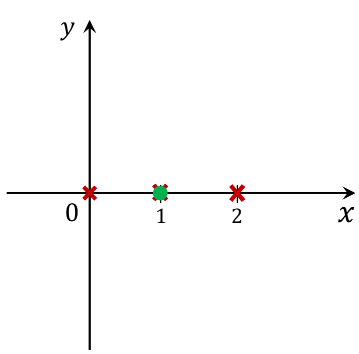
$$\frac{2}{z-2} = 2[\underbrace{(z+1)}_{s}\underbrace{-\,3}_{t}]^{-1} = \cdots$$

سری لوران خواهد شد:

$$f(z) = \cdots + 19(z+1)^{-3} + 7(z+1)^{-2}$$

سری لوران (لورنت)

تمرین: همه بسط‌های لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ را حول نقطه $z=1$ بنویسید.



ناحیه‌های بسط

$$\left.\begin{array}{l} |z-1|<1 \\ \\ |z-1|>1 \end{array}\right\}$$

سری لورنت چند تابع مقدماتی

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots \qquad 0 < |z| < \infty$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \cdots \qquad 0 < |z| < \infty$$

$$\frac{1}{1-z}\begin{cases} \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n & |z| < 1 \\ \dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} - \cdots = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^n} & |z| > 1 \end{cases}$$

Then to the rolling Heav'n itself I cried,
Asking, "What Lamp had Destiny to guide

Her little Children stumbling in the Dark?"
And - "A blind Understanding!" Heav'n replied.

Ommar Khayam
The Sage

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir