ریاضیات مهندسی

اعداد مختلط
بخش هفتم
نظریه حساب مانده‌ها

محمدعلی شفیعیان

http://shafieian-education.ir/

صفرهای توابع و مرتبه آن‌ها

z_0 را یک صفر تابع $f(z)$ نامیم اگر: $f(z_0)=0$

صفر تابع را از مرتبه n نامیم اگر $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0$ ولی مشتق مرتبه nاُم آن $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ باشد.

صفرهای برخی توابع

ـ صفرهای $\sin z$ و $\cos z$ همان صفرهای حقیقی آن‌ها یعنی به‌ترتیب $k\pi$ و $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ برای kهای صحیح هستند.

ـ صفرهای $\sinh z$ و $\cosh z$ به‌ترتیب $k\pi i$ و $(2k+1)\frac{\pi}{2}i$ برای kهای صحیح هستند.

ـ تابع e^z فاقد صفر است.

صفرهای توابع و مرتبه آن‌ها

نکته ۱: به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که صفرهای توابع $\sin z$، $\cos z$، $\sinh z$، $\cosh z$ و $e^{az}+b$ همگی از مرتبه یک هستند

نکته ۲: تابع $(z-a)^n$ برای n طبیعی دارای صفری در نقطه a از مرتبه n است.

نکته ۳: اگر $z=a$ صفر مشترک توابع $f(z)$ و $g(z)$ به‌ترتیب از مرتبه n و m برای $m<n$ باشند، آنگاه $z=a$ صفر مشترک تابع:

۱- $Af(z)+Bg(z)$ از مرتبه m است. (A و B مخالف صفر هستند)

۲- $f(z)\times g(z)$ از مرتبه $n+m$ است.

۳- ${f(z)}/_{g(z)}$ از مرتبه $n-m$ است.

صفرهای توابع و مرتبه آن‌ها

نکته ۴: z_0 را صفر تکین تابع $f(z)$ نامیم اگر همسایگی از z_0 موجود باشد که در آن همسایگی $f(z)$ شامل صفر دیگری به‌جز z_0 نگردد.

نکته ۵: صفرهای توابع تحلیلی تکین هستند.

نکته ۶: اکر تابعی به‌صورت ضرب (یا تقسیم و ...) از چندین تابع دیگر باشد و صفرها و مرتبه‌های آن خواسته شود، ابتدا صفر هر یک از توابع به‌همراه مرتبه آن‌ها را به‌دست می‌آوریم؛ سپس به صفرهای مشترک نگاه می‌کنیم و با استفاده از قواعد بالا، مرتبه هر یک از آن‌ها را به‌دست می‌آوریم.

قطب‌های توابع و مرتبه آن‌ها

اگر بسط لوران (لرنت) تابع $f(z)$ در همسایگی از نقطه منفرد تکین z_0 شامل تعداد متناهی توان‌های منفی از $z-z_0$ باشد، آنگاه نقطه z_0 از یک قطب $f(z)$ می‌نامیم. اگر $(z-z_0)^{-m}$ بزرگترین جمله شامل توان منفی موجود در بسط باشد، قطب را از مرتبه m نامیم و داریم:

$$\underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

بخش اصلی تابع $f(z)$ در z_0 = حاصل جمع تمام جملات شامل توان‌های منفی

اگر
- $m=\infty$ باشد، آنگاه z_0 را یک نقطه منفرد اساسی تابع $f(z)$ می‌نامیم.
- $m=1$ باشد، آنگاه قطب z_0 را قطب ساده می‌نامیم.
- $m=0$ باشد، آنگاه قطب z_0 را یک نقطه منفرد برطرف‌شدنی تابع $f(z)$ می‌نامیم.

قطب‌های توابع و مرتبه آن‌ها

نکته: روش دیگر تعیین نوع نقطه منفرد و مرتبه قطب در نقطه منفرد تکین z_0 برای تابع $f(z)$ به‌جز استفاده از بسط لرنت تابع در نقطه z_0 به صورت زیر است:

روش اول: ابتدا $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ را برای $m=0,1,2,\cdots$ به‌ترتیب محاسبه می‌کنیم تا زمانی‌که برای اولین بار مقدار متناهی برای حد نتیجه شود. اولین مقداری از m که به‌ازای آن حد بالا متناهی شود، مرتبه قطب است. اگر z_0 یک نقطه منفرد اساسی باشد در این صورت، حد بالا برای هیچ مقدار m متناهی نمی‌شود.

روش دوم: مراجعه به مرتبه صفر صورت و مخرج در z_0

تفاضل مرتبه صفر مشترک صورت و مخرج = مرتبه قطب

قطب مرتبه اول را قطب ساده می‌نامند. همچنین نقاط منفرد برطرف‌شدنی یا اساسی را به‌ترتیب قطب‌های تابع از مرتبه‌های صفر و بینهایت می‌گویند.

قضیه حساب مانده‌ها

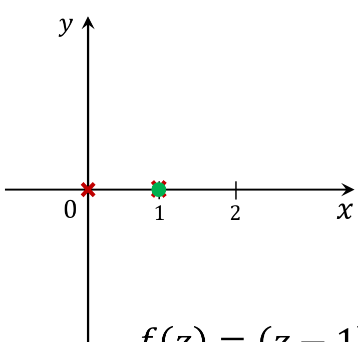
تعریف مانده (Residue)

فرض کنید تابع $f(z)$ در نقطه z_0 غیرتحلیلی باشد (z_0 را قطب $f(z)$ گویند). آنگاه مانده نظیر $f(z)$ برای قطب $f(z)$ را چنین تعریف می‌کنند:

ضریب جمله $(z-z_0)^{-1}$ را در بسط لوران تابع $f(z)$ حول z_0 به شرط اینکه ناحیه مورد نظر ناحیه $|z-z_0|<\rho$ باشد را مانده $f(z)$ نسبت به قطب z_0 گویند. (ρ فاصله z_0 تا نزدیکترین نقطه منفرد بعدی است)

قضیه حساب مانده‌ها

مثال: مانده تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-1)^2}$ را به‌ازای قطب $z=1$ حساب کنید.



$\rho=1\ \rightarrow$ ناحیه بسط لوران: $|z-1|<1$

اگر بسط لوران تابع $f(z)$ را در ناحیه بالا بنویسیم، داریم:

$$f(z)=(z-1)^{-2}-(z-1)^{-1}+1-(z-1)^2+\cdots$$

$$\Rightarrow\ \text{مانده}\ f(z)\Big)_{z=1}=-1 \qquad \Rightarrow\ r=-1$$

قضیه حساب مانده‌ها

تذکر: برای آنکه جهت محاسبه مانده‌ها بی‌نیاز از تشکیل بسط لوران باشیم، قضیه زیر را در نظر می‌گیریم:

قضیه: اگر نقطه $z = z_0$ قطب مرتبه m اُم تابع $f(z)$ باشد، آنگاه مانده $f(z)$ نظیر این قطب خواهد شد:

$$Res\, f(z_0) = Res(f(z), z_0) = \operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = r = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}\right]$$

تذکر: به تعداد دفعات تکرار قطب، مرتبه قطب (m) گویند.

در مثال قبل، $z = 0$ از مرتبه یک (قطب ساده) و قطب $z = 1$ از مرتبه ۲ است.

قضیه حساب مانده‌ها

مثال: مانده تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ را نسبت به تمام قطب‌هایش حساب کنید.

$$r = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}\right]$$

$(m=1)$ قطب $z=0 \Rightarrow r_1 = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \lim_{z\to 0}[zf(z)]$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2} = 1$$

$(m=2)$ قطب $z=1 \Rightarrow r_2 = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2 f(z)]$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z}\right] = -1$$

قضیه حساب مانده‌ها

مثال: مانده تابع $f(z)=\frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)}$ را نسبت به قطب‌های $z=0$ و $z=1$ بیابید.

$$r=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}\right]$$

$$(m=1)\qquad \text{قطب}\ \ z=0\ \Rightarrow\ r_1=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=\lim_{z\to 0}[zf(z)]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4-3z}{(z-1)(z-2)}=2$$

$$(m=1)\qquad \text{قطب}\ \ z=1\ \Rightarrow\ r_2=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=\lim_{z\to 1}[(z-1)f(z)]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{4-3z}{z(z-2)}=-1$$

قضیه حساب مانده‌ها

تذکر: گاهی برای بعضی از توابع نمی‌توان از قبل، مرتبه قطب را مشخص کرد. در مورد این توابع همیشه از بهترین حالت یعنی $m=1$ شروع می‌کنیم. اگر به‌ازای $m=1$ برای مانده عدد محدود و معینی به‌دست آمد، انتخاب درست بوده است و در غیر این‌صورت به سراغ $m=2$ می‌رویم و ....

نخستین m که به‌ازای آن برای مانده عدد محدود و معینی به‌دست آمد، انتخاب درست بوده است

قضیه حساب مانده‌ها

مثال: مانده تابع $f(z) = \frac{z+1}{1-\cos}$ را نسبت به قطب $z = 0$ بیابید.

$$m = 1 \Rightarrow r = \lim_{z\to 0}[zf(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+z}{1-\cos z} \overset{HOP}{\Longrightarrow} = \lim_{z\to 0}\frac{2z+1}{\sin z} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$m = 2 \Rightarrow \quad r = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^3+z^2}{1-\cos z}\right]$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(3z^2+2z)(1-\cos z) - \sin z\,(z^3+z^2)}{(1-\cos z)^2}$$

پس از دو بار هوپیتال، جواب برابر ۲ می‌شود. پس مرتبه قطب $z = 0$ برای تابع بالا مرتبه ۲ و مانده نظیر آن برابر با ۲ است.

قضیه حساب مانده‌ها

مثال: مانده تابع $f(z) = \tan z$ را به‌ازای قطب $z = \frac{\pi}{2}$ بیابید.

$$m = 1 \Rightarrow r = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\tan z\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cot z}$$

$$\overset{HO}{\Longrightarrow} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-(1+\cot^2 z)} = -1$$

(انتخاب درست)

قضیه حساب مانده‌ها

تذکر: گاهی برای برخی از توابع خاص می‌توان مرتبه قطب را از طریق سری تیلور نیز به‌دست آورد.
مثال زیر این موضوع را نشان می‌دهد.

مثال: مانده تابع $f(z)=\frac{z+1}{1-\cos}$ را نسبت به قطب $z=0$ بیابید.

در این روش، به‌جای $\cos z$ سری تیلور آن حول $z=0$ را قرار می‌دهیم.

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

$$f(z)=\frac{z+1}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots} \quad =\frac{z+1}{z^{2}\left[\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right]}$$

$$m=2$$

قضیه حساب مانده‌ها

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2\left[\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right]}$$

$$r=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2 f(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z+1}{\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right)-(z+1)\left(-\frac{2z}{4!}+\cdots\right)}{\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right)^2}\right]=\frac{1/2}{1/4}\;=2$$

قضیه حساب مانده‌ها

مثال: مانده تابع $f(z) = \frac{1}{z-\sin}$ را به‌ازای قطب $z = 0$ بیابید.

در این روش، به‌جای $\sin z$ سری تیلور آن حول $z = 0$ را قرار می‌دهیم.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots} \qquad = \frac{1}{z^3\left[\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots\right]}$$

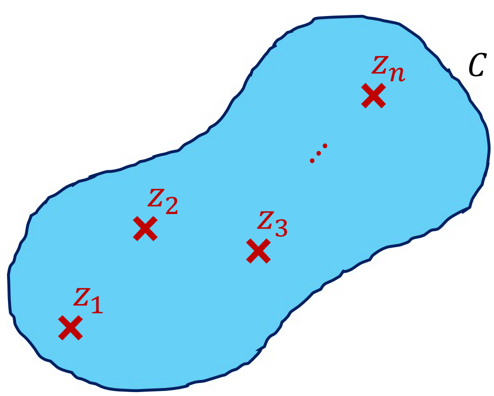
$m = 3$

$$r = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 f(z)\right] = \cdots = 0.3$$

قضیه مانده‌ها

اگر تابع $f(z)$ دارای قطب‌های z_1، z_2، ... ، z_n با مانده‌های r_1، r_2، ... ، r_n در درون منحنی بسته C باشد، آنگاه داریم:

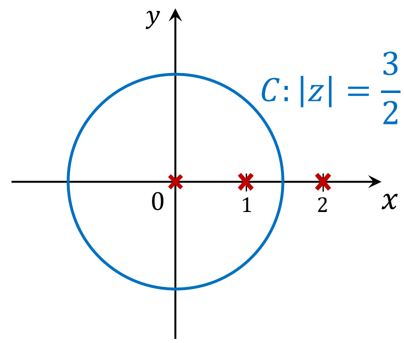
$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$$



قضیه مانده‌ها

مثال: حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I = \int_{C:|z|=\frac{3}{2}} \frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)}\,dz$$



$r_1 =$ مانده نظیر قطب $z = 0$ $= 2$

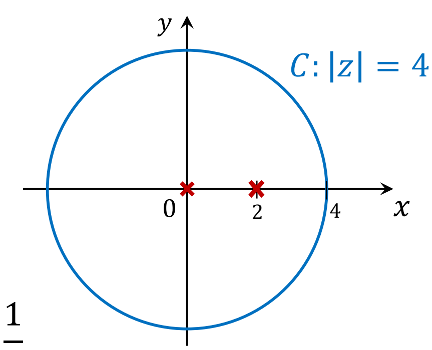
$r_2 =$ مانده نظیر قطب $z = 1$ $= -1$

$$\Rightarrow I = 2\pi i(r_1 + r_2) = 2\pi i$$

قضیه مانده‌ها

مثال: حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I = \int_{C:|z|=4} \frac{1}{z(z-2)^2}\,dz$$



$r_1 =$ مانده نظیر قطب $z = 0$ $= \lim_{z\to 0}[zf(z)] = \frac{1}{4}$

$r_2 =$ مانده نظیر قطب $z = 2$ $= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\underbrace{[(z-2)^2 f(z)]}_{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{4}$

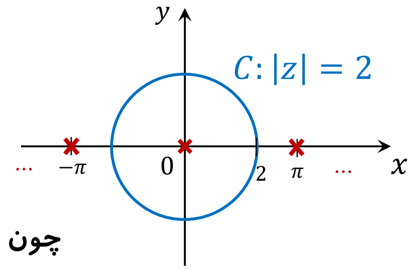
$$\Rightarrow I = 2\pi i(r_1 + r_2) = 0$$

تذکر: این مثال نشان می‌دهد که عکس قضیه کوشی درست نیست.

قضیه مانده‌ها

مثال: حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I=\int_{C:|z|=2}\frac{1}{z\sin z}dz$$



تعیین قطب‌ها: $\sin z=0 \;\Rightarrow z=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$

چون $z=0$ هم در ترم z و هم در ترم $\sin z$ ظاهر شده است پس قطعاً مرتبه آن $m\geq 2$ است.

$$m=2\;:\quad r=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[z^2f(z)\right]=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{\sin z}\right]=\lim_{z\to0}\left[\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}\right]$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\cancel{\cos z}-\cancel{\cos z}+z\cancel{\sin z}}{2\sin\cancel{z}\cos z}=\lim_{z\to0}\frac{z}{2\cos z}=0\qquad\Rightarrow I=2\pi i r=0$$

دل گر چه درین بادیه بسیار شتافت

یک موی ندانست و بسی موی شکافت

گرچه ز دلم هزار خورشید بتافت

آخر به کمال ذره‌ای راه نیافت

ابوسعید ابوالخیر

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این درس می‌توانید به وب سایت آموزشی در لینک زیر مراجعه نمایید

http://shafieian-education.ir